目　录

第一章 数学的史前史

整数、记数法和空间形式概念的起源与发展

数学正如许多其他科学一样，是从离我们极其遥远的人类生存时期开始的，那个时期未曾留下任何书面的文献，因为最基本的数学概念在人类发明记录自己思想的符号之前很早就产生了。然而研究文化落后民族的日常生活、他们的语言和传说，以及研究具有高度文化水平的民族的语言发展和故事，这些研究成果使我们能够断定，由于生产力和生产关系的发展，人们的心理活动也随之发展。同时越来越明显的是，人类以辛勤的劳动，在数千年间形成了数学的基本概念。在我们面前展现出人类逐渐产生的最初、最简单的数学概念，特别是数的概念。

数是我们生活中表示一切数量关系的尺度。因为数量变化在大多数的数学关系中具有重要的意义，我们应该把数量变化这个概念的发展问题，放到研究整个数学概念发展的首位。

然而，人类在何时和怎样才产生出数的概念的问题，依靠间接研究的方法是得不出精确结论的，因为具有高度文明的民族对落后民族的生活进行研究，只是在当落后民族中最落后的已经处于中等野蛮程度时(根据 F. 恩格斯的术语)，也就是在他们已经晓得取火和用火，制造初期打猎用的石头武器，发明了弓箭，制作木头餐具和其他器具，以及用简陋小船作为交通工具的时候才开始的。不论研究家们深入到哪里，也不论他们与怎样的部落相遇，他们从每个部落那儿都已经找得出一些数学概念。现代研究家们从事研



B. B. 巴贝宁

究某些文化落后民族的生活状况和日常生活，从他们那儿还能发现一些数学发展的标志，据此我们足以清楚地想象出，人类是怎样逐渐地，一步步地获得了数量关系方面的最初知识的。

个别研究家和旅行者有机会作出的系统观察结果，经过了严格的科学整理。在这方面俄国数学家 B. B. 巴贝宁 (1849～1919)、M. E. 瓦申卡-扎哈尔琴科 (1825～1912)、H. M. 布勃诺夫等的著作起了相当巨大的作用。我们运用这些著作和某些外国著作的结论，就能较可靠地把人类获得的最初的数量规律性方面的知识，即数学知识复原出来。

人类从"多"这个概念中，分出"一"的概念，这被认为是人类经过最困难的阶段才作出的数的概念。分出"一"的概念，想必发生在人类处于低级发展阶段。B. B. 巴贝宁把这种分出解释为，人通常总用一只手拿一件物品，根据他的见解，这便把"一"从"多"中分了出来。因此，巴贝宁认为计数的开端就建立了由"一"和不确定的"多"这两个概念构成的计数法。

例如，曾经生活在巴西的保托库德部落就只用"一"和"多"两个词来表达数(在巴西被占领期间，由于欧洲人对他们的残酷迫害和杀戮，这个部落现在几乎濒于灭绝)。对于数"二"的出现，巴贝宁也解释为可能是由于用双手各拿一件物品。在计算的初级阶段，人们把这个概念与双手中各有一件物品联系起来了。表示"三"的概念时则遇到了难题：人没有第三只手。当人们领悟到可以把第

三件物品放在自己的脚边时，这道难题也就解决了。这样，"三"的特征就是举起双手和指定一只脚。由此比较容易地将"四"的概念区分出来，因为一方面两只手与两只脚形成对照，另一方面能够在每只脚边各放一件物品。在发展计数的初级阶段，人们还绝对不会使用数的名称，在表达数时或者用实际拿在手上或放在脚边的被数物品，或者就靠相应的身体动作和手势。

计数的继续发展，大概与那个时候人类熟悉狩猎和捕鱼等生产方式有关。为了从事这些生产，人们不得不造出简单的工具。此外，人们进入寒冷地带，这就迫使他们制作衣服和创造加工皮毛的工具。

原始公社社会随着对食物、衣服和武器作适当的分配也逐渐缓慢地形成了。所有这些状况迫使人们以某种方式对公共财富进行计算。为占领新领土，他们不得不对与之战斗的敌人的力量和其他等等作出统计。计算的过程已经不能停留在"四"上，应当不断地发展。

在这个发展阶段中，人们已经抛弃了必须将被数的物品拿在手中或置于脚边的做法。数学中发生了第一次抽象，这就是把一些被数物品用另外某些彼此同类的物品或标记来代替：如用小石块、绳结、树枝、刻痕。根据彼此一一对应的原则进行这种计算，也就是给每个被数物品选择一个相应的东西作为计算工具（即一块小石子，细绳上的一个结子等等）。这种计算方法的痕迹至今在许多民族中还保留着。有时候为了不致丢失这些简陋的计算工具（小石块、贝壳、核），而把它们串在细绳或小棒上。到后来就导致创造出至今还有用的更完善的计算工具：俄国算盘和中国人发明的中国算盘。

当人们领悟到离自己最近的和天生的计算器——自己的手指时，计算的发展才大幅度地加快了。可能，第一次用手指计算的行为是用食指去指物品，当时手指起了一定的作用。手指参加计算，

帮助人们越过了数“四”，因为当开始用一只手上的所有手指计算相同的个体时，就能够一下子把数数到五。

计算的继续发展要求计算工具更加复杂，人们在开始使用第二只手的手指时，找到了这方面的出路。尔后又扩展到使用自己的脚趾，因为对不穿鞋子的部落来说，利用脚趾是很自然的事。在此情况下，把这种刻板的计算加以扩充，显而易见，在一一对应时，就产生了同时使用手指和脚趾的可能性，在某些民族中表现出这种情况。

例如，南美洲的印第安人，为了表示数“二十”，就把手指和脚趾合在一起。

在我们所描述的那个时代里，人们经济上的计算，只限于把与敌人交战中缴获的食物和衣服进行分配，之后就没有必要再记住计算时出现的数，所以计算时也就不需要数的名称，而主要是借助于相应的手势进行计算。

比如，分布在印度洋畔孟加拉湾的安达曼群岛上的当地居民（这些居民全被殖民主义者消灭了），没有表示数的词，当要计算时就用这样或那样的手势来作说明。由此可见，用打手势计算就象遗迹一样，长期地保存在许多没有产生口头读数的民族里。

农业成为生产的主要方式时，口头计算才刚刚开始发展。在这个时期逐渐产生了以田地、菜园、畜群为对象的私有财产。土地、家畜的拥有者将牢固地与他的财产联系在一起，于是不仅被迫计算属于他们的财产，而且要记住它们的数目，这种情况推动着人们走上创造数的名称的道路。起初，记忆是用极拙劣的方法：借助被记物品的外表特征恢复记忆。例如，犍牛的拥有者要记住他的一群牲口的数目，是根据一只犍牛是灰色的，另一只是黑色的等特征来记忆的。无疑，当要记住数目较大的物品时，这样的记忆方法就不能适用。

应当承认，要表述几个个体的总和，是数的名称发展的下一个

阶段。例如，表示两个物品的数的名称时，就用“就象我有几只手这样多”这句话来替代，表示数的名称“四”的句子，说成“就象牲口有几只脚那么多”。总之，主要是用人和动物的身体部份作为对一些物品的口头表达。

后来在许多民族中，这些叙述的语句被相应单词的名称所代替。这样一来，这些名称便作为数字巩固下来。例如，数“二”用词“耳朵”、“手”、“翅膀”表示；“四”表示为“鸵鸟的脚趾”(四趾的)，等等。

手指计算逐渐引起了计算的调整，人们自觉地想法使数的口头表达简单化。例如，应该与表示数“十一”相符的“两只手上的十个手指和一只脚上的一个脚趾”，被简化为“脚的一趾”；为了表示数“二十三”，把“两只手上的十个手指、两只脚上的十个脚趾和别人的三个手指”，简单地说成：“别人的三个手指”。

当时类似的简称导致了划分出更高一级的单位。事实上，诸如此类的名称，如表示五的“手”，表示十的“双手”，表示十五的“一只脚”，表示二十的“人”等等，都是为表示比手指更高一级的单位所用的，而手指起的是低级单位的作用。在这种意义上，表示六的说法“另一只手上的一个手指”，可以看作“第二个五个手指中的一个”，或者看成“五与一”，这里一是低级单位，而“五”，即“手”，是高级单位。正是这样，表示十二的名称“一只脚上的两个脚趾”表明，从第二个十个中取出两个一；假如换成这样的句子：“双手与两指”也行，这里“双手”在与手指的关系中起到了高一级单位的作用。这样一来，独特的记数法也就已经形成了。

二进位制被认为是最古老的记数法。它出现在人们还没有用手指进行计算的时候，也就是在一只手是低级单位，一双手和一双脚是高级单位之前的时候。我们甚至到今天还可以在高度发展的民族中找到二进位制记数法的痕迹；譬如说，人们有时希望用一双、一对来数数。在古俄罗斯的货币体制中，我们碰到以二和四来

作为货币单位($\frac{1}{2}$戈比,$\frac{1}{4}$戈比),这也是二进位制的遗迹。澳大利亚和玻里尼西亚群岛的某些民族,至今还保留着二进位制记数法。

例如,在托列斯峡[①]群岛上的某些部落里,只有一——“乌拉勃”和二——“阿柯扎”。就靠这两个数进行计算。在他们的语言中,“三”用“阿柯扎、乌拉勃”表示,“四”是“阿柯扎、阿柯扎”,“五”是“阿柯扎、阿柯扎、乌拉勃”,“六”是“阿柯扎、阿柯扎、阿柯扎”等等。

人们采用手指计算,这就使各种记数法创造出来了。

五进位制被认为是手指记数法中最古老的。这个记数法,据推测起源于美国,并得到充分推广。它在人们运用一只手上的手指进行计算的时期就建立起来了。显然,使用这种记数方法,每当一只手上的手指全部数完,某一外部的记号也就形成了。时至今日,在一些部落中还完全地保持着五进位制(例如在玻里尼亚群岛和美拉尼西亚群岛的居民中)。

记数法沿着两条道路继续发展。没有停留在只用一只手的手指计算的部落,转向利用第二只手的手指,并继而用脚趾来计算。此时一部分部落仍停留在只用双手计算,这就奠定了十进位制记数法的基础。而另一部分部落,想必是大部分部落,推广了用脚趾计算,从而成为建立以二十为基数的记数制的前提。这种记数制主要在北美相当大部分的印第安人部落,中美和南美的土著居民,以及西伯利亚北部和在非洲得到推广。

目前,十进位制记数法在欧洲民族中占优势。然而这并不意味着,这种记数法在欧洲始终是唯一的:某些民族很晚才改用十进位制记数法,而先前用的则是其他的记数法。

在产生二十进位制时,具有20个指趾的“人”就成了天然的高一级单位。在这种进位制中,40表示为“两个人”,60表示为“三个

① 托列斯峡是介于澳大利亚北部的约克角半岛与伊利安间的海峡。连接印度洋和太平洋诸海,宽170公尺,属浅水峡,有许多岛屿、岩石、珊瑚礁。——译者注

人"等等。二十进位制有个较大的缺陷：为了用语言表达，对 20 个基数必须有不同的名称。因此，当十进位制在一些部落中发展后，许多运用二十进位制的部落就逐步地采用十进位制，而抛弃了二十进位制。据推测，人们开始穿鞋以后，脚趾被遮起来，不能再用两个十只直接计算，这也促进了由二十进位制向十进位制过渡。在现代，二十进位制在所有民族中都已完全消失了。这种进位制通常归并成十进位制或者五进位制。然而这种进位制的痕迹，甚至在一些文化达到高度发展的民族中，仍然保留在数的名称中。

例如，法国人表示数 80 用单词 quatre-vingts（四倍的二十），而 90 则用单词 quatre-vingt-dix（四倍的二十与十）。格鲁吉亚人把数 40、60 和 80 称为厄尔姆沃则、萨姆沃则和阿特赫姆沃则，即 2×20、3×20 和 4×20（这里的"沃则"就是 20，"厄尔"就是 2，"萨姆"就是 3，而"阿特赫"就是 4）。数字 30、50、70 和 90 称为沃则达基、厄尔姆沃则达基、萨姆沃则达基和阿特赫姆沃则达基，也就是 $20+10$、$2\times20+10$、$3\times20+10$ 和 $4\times20+10$。

某些部落用来作为计算工具的不是手指本身，而是它们的关节。在这种情况下，这样的计算有时也会有效地发展，并且形成严整的系统。这种计算过程是这样进行的：一只手上的大拇指是这只手上其余手指关节的计数器；因为在这只手上其余四个手指中每一个手指上各有三个关节，所以在最后的关节数 12 的后面是高一级单位，这就形成了十二进位制记数法。有时候这个过程不是停留在十二进位制上，而是继续下去，并且另外一只手上的每个手指也作为高一级的单位，即 12，于是数完第二只手上所有的手指以后，建立起新的高一级单位 12×5，也就是 60。可能是这种类型的计算促进了建立六十进位制记数法，这种记数法在古代巴比伦广为流行，并在稍晚的时候流传到别的民族。不过，关于六十进位制记数法的起源，存在着另一种可能是有足够根据的意见。在下一章里，我们将会接触到这个问题。

十二进位制和六十进位制记数法的痕迹直到现在仍然有所保留。只要想一想一昼夜钟点的计算，用度、分、秒测量角度，在革命前的俄国实行过的打和罗① 的计算就明白了。

这样逐渐地在经济性质要求的影响下，人类慢慢地创造出计算的方法，最后达到了严整的程度。后来，这个方法在尚未成为现代数学所使用的方法的时候，得到不断的完善和简化。

人们的积极劳动，生产力和生产资料的发展，迫使人们将初等计算与自己增长着的需求和智力的发展相适应。在这种初等计算的基础上，生活现象数量方面的表达者和发展人类文化技术忠实的同路人——现代宏伟的数学大厦落成了。

* * *

如果说，劳动过程的发展和财产的出现，迫使人们发明数和数的名称，那么人们经济需求的增长，更引导人们对数的概念日益扩大和加深。当具有或多或少要求统计财富和建立税收制度的复杂国家机器的国家出现时，以及当商品交换转入用货币进行贸易的发展阶段时，就这个意义上来说，数的概念出现了特别大的发展。一方面引起了书面数字的产生，另一方面计算业务开始发展，也就是出现了数的运算。

上面我们已经讲过，早在远古时代就已产生了数的某种记录：所有这些结子、刻痕、串在细绳上的贝壳，不外乎是记录数的萌芽。但是，当贸易规模扩大时，开始出现了巨大的数，就不可能用这种以物计数的方法表达巨数。同时贸易业务要求计算更加复杂：出现需要求几个数的和，进行减法、乘法和除法运算；用以前的原始方法进行这类计算已经感到不方便。这时候人类就逐步地过渡到书写数。

此外应当指出，在人们的生活需求普遍增长的同时，人类社会中紧密依赖于生活的要求也普遍增长，除数和计算以外，还逐渐发

① 罗——商业用语，一罗即十二打。汉字译自英语 gross 。——译者注

展着思维和实践活动的另一个分支，这个分支成为进一步发展数学知识的基础，这就是人们发明了各种度量和发展了测量的方法。如果数的概念促进了数学的一个主要分支——分析的发展，那么人们对周围的物体及其形状的观察和各种测量方法的发展，都促进了数学的另一个分支——几何学的产生。

我们已经简要地探讨了作为分析基础的数的概念的产生，至于说到产生几何性质的概念，那么首先应该指出，人们对周围物体各种各样的形状的认识，具有头等重要的意义。几何概念起源的历史，就它的性质而言，俨如产生数和计算的历史。产生最初的空间形式是在史前时期。每个人从自己一诞生起就处在极其丰富的大自然环境之中；在与大自然的直接接触中，他不由自主地开始感到每个物体的个别特性。人们从这种环境中采用了最初的几何形式和最初的几何图形。他们不得不在数百万次来往中力求发现最短的道路，就这样人们渐渐地产生了直线的概念。当人们不得不制造最简单的打猎武器——绷紧绳子的弓时，直线的概念就更为明确了。每当人们不得不经常在开阔的牧场上和草原上时，在他们的视野中展现出天空与大地的分界线，这就在无意之中形成了圆周和以它为界的圆的概念；他们还在其他情况下遇到过这样的轮廓：如势必看到天上太阳和月亮的圆盘，而后来正是他们制成了圆形的车轮和器皿。因此，人们在制造日常生活中必不可少的物品时，逐渐地熟悉了他们努力模仿的各种形状。确实，这些形状，在大自然中是见不到的，然而它们作为完美正确的几何图形，被铭记在人们的意识里，类似的概念帮助人们记住它们，在制作日常用品时，帮助人们顺利地把它们生产出来。从周围世界中抽象出来的这类概念是最初的几何概念，并且人们为这些概念所起的名称使用了很长时间，有些至今还在应用。如采用于周围大自然的标准器①，人们在建筑住宅，在用粘土制作必备的器皿，为制造狩猎和

① 即用于计算度量单位的器具。——译者注

捕鱼用的原始工具等等时无数次地使用它。在安排住所时，人们必须削平和排齐石头，在安排围栅的时候，必须划定直线。这一切产生了变直和直线的综合概念。制作粘土器皿促进了对变成圆形的理解。建筑住宅和制作器皿同样也促进了理解空间体的概念。这样，人们最初的几何概念基本上不是靠对周围客体简单的直接观察，而是借助于满足自身最必须的生活要求的实际活动产生出来的。甚至在许多情况下，自古以来保留在几何学里的术语都可证明这一点。

例如单词“点”——几何学中的基本概念——是从拉丁语“pungo”翻译过来的，意思是“刺”，“触动”，医学术语“穿刺术”①也由此产生。单词“线”来自拉丁语“linea”，意思是“亚麻”，“麻线”；有时候这个词作为“直线”理解，并从这里产生了画直线所用的工具的名称“尺”②。还可以举出一系列显然合乎实际来源的，保持到今天或过去曾使用过的术语。例如，从希腊语译来的词“сфера”就是“球”；“куб”就是“骰子”，它具有立方体的外形；“пирамида”(棱锥)是埃及词，埃及人用这个词来称呼他们所建造的法老③们的金字塔式的大坟墓。

为了建造日常生活中需要的物体——住房、生产工具和其他等等，人们不得不采用已经掌握的形状，所以就产生了确定这些形状大小的要求。这样人们就得出了初步的长度、重量和容量的度量。

当然，对人来讲，最初的长度测量与他的身体部份的大小有联系。比如，为了测定长度，成年男子的步子被当作最通行的测量单位。要知道，直到今天我们还时常用脚步来测量距离。如果必须测量一些体积不大的物体，那么人就要如同在计算的情况下一样，

---

① “穿刺术”——俄语为“пункция”，取自拉丁语“pungo”。——译者注

② “尺”俄语为“линейка”，来自拉丁语“linea”。——译者注

③ 法老(фараон)——古代埃及皇帝的称号。——译者注

动用自己的手和脚帮忙。这时候手指的厚度、大拇指关节的长度、手掌的宽度，大拇指与食指或者中指顶端之间的距离、手的肘到指尖的长度、脚掌的长度等等，都是测量的单位。

数的写法和度量单位体系的发展，始终是与民族文化水平的普遍提高同时发生的，因此这方面的发展在那些沿着国家化的道路很快发展的国家里颇为迅速。

第二章　最初的数学知识积累时期

古代东方国家数学的发展

在全世界人们中，发展他们的经济和政治生活条件最有利的是居住在欧洲、非洲、亚洲三个大陆交界处的人们，还有居住在印度半岛和现在中国境内的人们。这些地方的自然条件千差万别。这些国家的海岸线，有的曲折蜿蜒，更有海湾相间，有时却非常平坦；有些海岸附近有大群岛屿，有些地方在千里海疆之滨却只有苍茫海水和辽阔蓝天；干旱的沙漠与肥沃的河谷相间；大陆时而被山脉切断，时而是绵亘数百公里的草地和多沼泽的平原。这种形形色色的自然条件，导致对生产力和相应的社会日常生活发展的考察，也同样是千差万别的。

远古时代人们还未掌握足够发达的技术，也不能控制大自然，人们的生活在颇大程度上依赖于周围环境。然而，即使那时，自然条件也并不能够在社会制度的发展中起决定性作用，自然条件只能有利或者相反地阻碍社会形式的发展，加速或者延迟这个过程。但是，毫无疑问，自然条件在古代人们的经济生活中，在他们建立首批统一国家的初期，在把人们复杂关系的各种表现连成一个整体时，有着很重要的作用。

在中国、古代的巴比伦、埃及、印度地区，在很久很久以前，人类的劳动已经得到一定的区分：富庶的牧场招引来大批的游牧民族从事畜牧业。肥沃的河谷自古以来是原始耕作的发源地，山区的高地为人们提供了发掘出来的财富，沿海一带帮助了航运和贸易得到早期的发展。

劳动的区分完全与民族部落的区分相适应。在民族和劳动的复杂环境里，部落的交叉，语言的相互作用，这些都是促进人类文化发展，同时也促进国家发展的极为有利的条件。这些地方比世界上其他地方更早地开始了原始共产主义分化的过程。农业贸易相当迅速的发展，以及各种不同民族固有的相互关系和劳动的各种形式所代表的相互关系，在颇大的程度上促进了这个过程，为劳动的分工和增加产品的积累创造了条件。所有这一切导致北非洲的河谷地和与它接壤的亚洲部分，以及现在的印度和中国的地方，形成第一批阶级社会——奴隶社会。

古代巴比伦的数学

古代巴比伦国家的位置，在美索不达米亚最靠近底格里斯河和幼发拉底河河床的地方。这个国家主要的城市巴比伦是在幼发拉底河岸上。巴比伦国家建立于公元前十九世纪，它是一个奴隶制国家。

巴比伦曾把人工灌溉作为农业的基础，因此需要建立复杂的下水道系统和它的管理制度。土地归帝王所有，只让农村公社或者自由的村民耕种。但是，帝王有权把部分土地赠送给自己的达官贵人，由于这个原因，出现了部分大地主。

巴比伦国家的兴盛是在公元前十八世纪下半叶。在这个时期，国家作为最大的土地所有者，特别关心灌溉系统的发展：采取了清理灌溉渠的措施，制造抽水机，并在全国领土上均匀地扩充灌溉。农业产品（谷物、水果、牲畜）成为输出给近邻国家的物品，贸易发展起来了，同时也带来了高利贷的发展。沉重的奴隶劳动是国家经济和私人经济的基础。

农产品的丰富首先促进了贸易的发展。此外，巴比伦的中心位置，处在通航出海的河岸边上，以及从巴比伦出发通往伊朗和埃及驮运货物的商队都有利于贸易的发展。

在公元前689年，巴比伦城曾经被亚述国王西纳赫里勃所毁坏，他的继承者阿萨尔哈顿在公元前680年重新建设，在布尼甲尼撒二世(公元前604～前562年)统治下的这个城市，达到了高度的繁华。公元前331年巴比伦被马其顿的亚历山大占领，然后在公元前312年交给他的继承者谢列夫克，他把城市里的大部分居民流放出去。从这时起，巴比伦丧失了自己占优势的地位，直到公元前二世纪彻底毁坏为止。

巴比伦在其最发达的时期，发展了工业和商业。除了自给自足的产品外，还从这里输出地毯，毛织品和麻织品，用象牙制造的项链，手镯，宝剑，梭镖，香料，家庭日用品。

商业的兴盛带来了货币制度的发展。开始时，把谷物或者银器作为货币单位。国家征税，或者用实物，或者用银器。后来逐渐开始用银币代替货物和征税的支付方法，经过这种方式完善了货币制度。已经发展的贸易要求整个测量单位制度更为准确，因此在巴比伦建立了类似于我们现在的米制的测量单位制度，只是作为这个测量单位制度基础的不是数字10，而是60。这个制度完全能胜任巴比伦人测量时间和角度。我们继承了巴比伦人划分时间和角度的方法，即1小时、1度等于60分，1分等于60秒。在重量单位制度方面，发现某些不符合这种原则的办法：1个塔兰(талант)①包含60米那②(мина)，1米那等于60赛克尔(сикль)，1赛克尔等于180微量，改换成我们的计算，1个微量大约是10克。巴比伦人所使用的长度单位更小。

研究者以各种方式说明，巴比伦人的60进位制，首先考虑到以60为基数较为方便，它是2、3、4、5、6、10、12、15、20、30、60的倍数，在很大程度上可以使计算简化。不过也有人认为，巴比伦人的

① 塔兰是古希腊的重量单位；又为货币单位；亦为现代希腊的重量单位，一塔兰等于150公斤。——译者注

② 米那是古代欧亚非许多地区的重量单位，各地标准不同，约合300～1000余克不等。——译者注

60 进位制有几何解释作为基础，我们将在下面介绍这种看法。

在十分遥远的时代，巴比伦人就产生了数的写法。有人推测，居住在巴比伦本国领土上的人们采用数的写法，远在这个国家形成之前。他们所写的数类似于巴比伦的文字，在粘土的方格上压印出三角楔形，并且把三面的条木作为写字的工具。这种楔形文字主要由楔形的三种情况构成：竖直尖头向下，水平尖头向左和向右。这时符号 𒁹 表示 1，符号 𒌋 表示 10。借助于这些符号可以进行加法，还可以表示多位数。例如，符号 𒐊 表示 5，符号 𒌋𒌋𒐈 表示数23 等等。

在 60 进位制中，这些符号足以表达和书写，尤其是能表达和书写任意的量。在这种情况下，考虑到数字符号的地位，而且把较大的部分放在左边，较小的部分放在右边，即用了后来建立书写十进位制记数法时所遵守的同样的顺序。例如 𒌋𒌋𒌋𒐉𒌋𒌋𒐊 表示数 $34\times 60+25$，即2065。但是，因为巴比伦人没有象我们的十进位制分数那样区别分数部分的符号，所以上述的写法也同样能读成 $34+\frac{25}{60}$，或者读成$\frac{34}{60}+\frac{25}{60^2}$。因此，为了准确地读出书写的数字，应该正确地表明，这个数表示哪种单位。就这样，巴比伦人的记数制已经有了相当大的发展。

商业、农业经济和建设的需要，在很大程度上促使巴比伦人从数学领域里获得了实际的知识。由于商业流通的增长，财政性质业务的复杂化，在巴比伦建立了现代银行原型的机构。在这些机构里进行交换支票付款的业务，办理债务登记，以及各种类型的公证交易。毫无疑问，这种类型的业务促使算术计算的发展。因此我们知道，巴比伦人进行乘法运算，有与我们大约同样的计算方法。而除法运算，则是根据倒数乘法的法则．这在应用 60 进位制

的分数时是合理的：因为60有很多个整数因子，致使这种运算简化。

在很多方面决定于四季更换的农业耕作和畜牧作业，以及水路旅游和商队驮运货物路线的需要，使巴比伦人留神地观察天空，因为那时发亮的天空是唯一的灯塔，根据天空可以确定所需方向的方位。由于这个原因，巴比伦人很好地研究了肉眼能看到的星的分布，编制出非常详细的星的分布图。同时他们发现，在许多看上去与天空一起绕地球旋转的星星中间，也有某些星星不按一般运动的规律，而是根据另外的路线运转。因此巴比伦人发现了行星的存在。当然，首先从天体中看到的是完成独立运动的最明亮和靠近地球的星球。这就是太阳、月亮、金星。同样十分自然的是，巴比伦人看到了太阳对地球上生命的巨大意义，并认为太阳与另外发现的行星具有神灵的属性。因此出现了祭祀三个天体：太阳、月亮、金星。同样情况，当发现新的行星——木星、火星、水星、土星时，崇拜为神的天体的数目就达到了七个。

巴比伦人很好地研究了月亮的运动，还确定了一个月亮月的时间为30天。这就为巴比伦人建立历法奠定了基础，12个月亮月组成一年。因为月亮月比太阳月要稍微少一点，所以巴比伦的一年要比太阳年短，因此，为了不落后于太阳年，巴比伦人在某些年里用规定闰月的方式来纠正误差。

用七天一个星期作为测量时间的较小的单位，每一天专供膜拜一个天体之用。许多民族直到现在在星期的名称里，还保持着巴比伦名称的痕迹。

例如，法国人一星期各天的名称中有lundi、mardi、mercredi、jeudi、vendredi，意为：月亮天、火星天、水星天、木星天、金星天，德国人有sonntag和montag，意为太阳天和月亮天，英国人有saturday，意为土星天等等。

在观察月亮阶段，巴比伦人就已经列出了月亮的变化表，这张

表是用 60 进位制编写的，颇为精确地表达月亮的真实变化阶段。这张月亮变化表我们译成如下形式：

5；10；20；40；1·20；

1·20；1·36；1·52；2·8；2·24；2·40；2·56；

3·12；3·28；3·44。

应当这样理解表里的数：

$1\cdot20=60+20=80$，$2\cdot8=60\times2+8=128$，

$3\cdot12-60\times3+12=192$ 等等。

这张表提供了预测的月相，月圆时等于 3·44，即 224 单位，而其余的数表明，从月圆到新月时在相反顺序中的月相的变化。

有一种看法，把一年分成 360 天，这给巴比伦人把圆周也分成 360 份提供了一个理由，他们命名这些部分是“步”。并认为在自己看得见的情况下，太阳围绕地球一昼夜旋转一步。把圆周分成 360 等分这个方法，一直保持到现在，并且我们把每一份叫做“1 度”，这个度是从拉丁语“步”译来的。

有些学者认为，把圆周等分成 360 份这样的分法，促使巴比伦人建立起 60 进位制记数法。这种观点拥护者的依据是巴比伦人曾经非常熟悉地把圆周分成 6 等分。例如，巴比伦的大型马车的车轮总是做成 6 根辐条。如果注意到把圆周分成 6 等分的方法，那么可以看到每一部分应该是 60 度，这一点似乎是建立 60 进位制的基础。

随着算术计算技能的发展，更加复杂性质的概念和高位计算就逐渐增多了。巴比伦人研究了数的开平方，并为这个方法提供了近似的计算。但是，这些方法非常复杂，事实上，巴比伦人主要利用现成的表计算。他们有与平方表同样准确的表计算立方根。在某些情况下，巴比伦人还运用了代数的概念。例如他们研究了某些一次方程和二次方程，甚至三次方程，并且他们在解二次方

程时，利用了我们可以把它看作解含有两个未知数的方程组的方法：根据两个已知数的积与和（或差），求这两个数。由上面所作出的月相表，我们可以看到巴比伦人已有了数列的概念：表的第一行表示等比数列，第二行表示等差数列，公差是16。

巴比伦人的几何知识是各种各样的。虽然巴比伦人既没有公理、定理，也没有证明，但是在他们的记载中可以找到足够的题目，其解法表明他们有把相当复杂的图形拆开的本领。在任何情况下，如果是平行线，他们会用比例线段，他们知道直角三角形各边之比，会求三角形与梯形的面积，棱柱与圆柱的体积。至于一般圆形体，巴比伦人认为圆的周长是直径的3倍，用这种方法计算题目时，求出的圆的周长与面积是不准确的。巴比伦人还会计算圆台和棱台的体积，但是，他们用高乘以两个底面积和的一半的方法计算，所以在大多数情况下，计算的结果是不准确的。

同时应当注意到，巴比伦人观察天文特征，直接得出了作为以后三角学基础的概念。当时巴比伦人观察在天空中运行的星体，看它们在天空中的位移情况，他们把天空看作半球面，因此，必需的测量不是在平面上，而是在球面上进行的。由于这个原因，巴比伦人较早考察的是球面三角的概念，而不是平面三角的概念。

古代巴比伦数学发展的概述表明，在远古时代巴比伦人就已经积累了一定的数学知识，但是我们不能说，他们的数学科学得到了发展，因为积累的知识没有理论根据，仅仅是观察和经验的结果。巴比伦人没有作出综合结论和证明。

在巴比伦，在产生各种科学领域基本概念的同时，假科学也获得了发展，这些假科学跟数学有密切的关系，也损害了数学的发展。这种假科学就是星相术和数的神秘论。

星相术这一假科学肯定地说，单个人的生活和整个人类社会，都依赖于天空中的行星相互间的排列。我们已经知道，巴比伦人

(根据设想，太阳四季的更替对人们的活动，特别是对农业经济的作业，具有非常重要的意义)得到了这样的思想，即行星在人的生活中有“影响”，并且把它们崇拜为神。由此他们作出了进一步的结论，每个人的命运就是在天空里行星排列所起的作用。因此，根据行星在天空中的相互排列，在一个人出生时就能够预言他将来的命运如何。还对整个国家和人民作出了相应的结论。古代巴比伦产生的星相术，后来又从巴比伦传播到其他的民族，对发展科学发生了很大的反动影响。

巴比伦人对数的神秘论反映在给某些数以“神秘的”意义。例如，当巴比伦人崇拜三个天体(太阳、月亮、金星)时，那么数 3 被看作是“幸福的”。更晚一些时间，当已经崇拜七个天体时，数 7 就被当作为“幸福的”。其实，许多民族都赋予数 3 和 7 以神秘的意义。这是因为自然数不是一下子就能揭开的，而完全是人们长期思维劳动的结果。前面已经谈到，人们最初只知道三个数：“1”、“2”、“多”。后来这个“多”就成为数3，又在 3 的后面出现了4、5、6 和多，在进一步发展数的概念时，多就成为7。以后同样出现了新的“主要的数”12 和 40。必须指出，这四个“主要的数”，无论在基督教或其他许多宗教里，都发挥了非常重要的作用。下面我们不止一次地会遇到，在发展数学的同时，某些民族产生了星相术和数的神秘论，这就阻碍了人类正确知识的发展。

古代埃及的数学

古埃及发展的历史时期是在离我们非常遥远的时代。埃及的物质文化古迹起源于公元前五世纪和四世纪，它帮助我们充分明显地想象出，产生这个远古阶级社会的人类历史的过程。

古埃及领土的位置与现在的位置区别不大。象现在一样，埃及基本上位于世界最长的河流之一——尼罗河中下游谷地。

公元前 3000 年起，在这块土地上就已经形成了早期奴隶主集

中的国家，它的形成是由于联合了众多的国家诺姆①。如果打猎、渔业和畜牧业是埃及居民最初的谋生活计，那么随着游牧居民在较为肥沃的地方逐渐定居下来，具有更重要意义的农业也开始发展了。尼罗河谷地的自然条件促进了农业的顺利发展。每年从6月到9月，尼罗河的洪水淹没了所有的谷地，洪水退后，在被水淹没的土地上，留下了从青尼罗河和白尼罗河中带来的矿物和植物的淤泥，这些淤泥对于农业是最肥沃的土壤，保障了谷物的大丰收。尼罗河的这个特性使埃及转向耕种，并以耕种作为农业的基本形式。但是尼罗河泛滥后肥沃的土壤缺少灌溉，因为跟着来的是一年中降雨量非常少的时期。这情形迫使埃及建立起人工灌溉土地的复杂的灌溉设备系统。这时，除了水渠以外，埃及在灌溉系统中甚至还有人工水库。在发展农业的同时，开始发展手工业，如陶器，首饰，织布手艺。此外，岩石加工取得了重大的进步；用岩石做成了农具、木工工具、武器、器皿。此外还把石头应用于建造房屋、坟墓上的纪念碑、教堂。同时，正是埃及获得了石头制品的材料，而制作首饰和家庭日常生活用品所用的材料（金、铝、铜，以后还用铁）必须从邻国运来：如从努比亚、塞浦路斯岛、西奈半岛，从阿拉伯沙漠到红海沿岸一带，等等。由于需要从很远的国家运进原料，另外希望卖出自己的货物，因此促进了通商的迅速发展。在这种情况下，埃及人沿着陆地、河流与海路，作长途旅行。海路是沿着红海的海岸和地中海的亚细亚沿岸航行的。

农业、手工业、贸易的发展引起了对某些科学问题进行观察的必要性，同时也促进了自然科学、地理学、天文学、数学各个领域知识的积累。

在埃及的农业发展中，每年同一时期尼罗河周期性的河水泛滥起了重大的作用。当然，这种情况引起了人们的记忆，必需注意河水泛滥间隔的时间。因为四季的变化是由天体运动决定的，所

① 诺姆是古埃及的省或州。——译者注

以埃及人开始了观察行星。按照天狼星的升起，他们规定出时间的间隔。天狼星清晨升起正值尼罗河的河水开始上升。埃及人把天狼星的两个清晨上升的间隔当作一年，它包含365天。埃及人的一年分成12个月，每个月是30个昼夜，在一年末增加5天(当作过节的)。每个昼夜被分成24个小时：12个小时是白天，12个小时是黑夜。白天和黑夜的小时其时间的长短是不一样的，因为白天的一小时表示从太阳升起到落下的1/12，而黑夜的一小时是从日落到日出的1/12。因为地球上靠近赤道的地方，白天和夜间的时间几乎是相等的，所以黑夜和白天的小时数比较起来相差是不大的。很久以来已经利用日晷来测量时间。大约在公元前1500年就已经使用了水钟——漏壶，它是底部有洞的容器。把这个容器灌满水，水从下面的孔里流完的这段时间作为计算时间的单位。



象形文字的写法

在建筑规模宏大的教堂、著名的埃及金字塔时，需要测量和计算，建造复杂灌溉系统也有测量和计算的工作，以及尼罗河泛滥后冲刷了全部边界标记，需要重新测量土地的界线，所有这一切对发展数学计算的最初经验，对认识基本几何形状和概念来说，都是肥沃的土壤。

埃及文化产生于公元前4000年，根据推测，在这个时期就已经建立了埃及的文字。最初的文字是象形的，即用一个图形表示一个概念。但是象形的写法逐渐变成另一种特殊形式，称为祭司文字。

书写数也用同样的方法。利用象形文字写数的方法，已经能表现出十进制，并且有了数位的专门符号：1，10，100等等，符号表示1，符号表示10，符号表示100，符号表示

1000，符号 { 表示 10000，符号 表示 100000，符号 表示 1000000，符号 Ω 表示 10000000。这时，如果一个数中有某位数的单位的若干倍时，那么只要把它的符号重复写若干次，即符号遵守加法的法则。例如，数 5 表示为 |||/|| ，数 122 的形式是 。

埃及人仅使用“单分子分数”，也就是只表示若干份中的一份，用我们的分数写法是分子为 1 的分数（这样的分数我们叫做运算分数）。分数 2/3 是例外，用特殊符号 表示，同样，分数 1/2 用特殊符号 表示，而其余所有的分数都用记号“po”表示，它的形式为 。要表示任何一个分数，就在这个符号下面写上数来表示分母，例如，七分之一写成 。

埃及的文字多半是用颜料写在纸莎草做的纸片上。有时也用石头、木头、树身、瓦片作为书写的材料。书写文字时，如果横写，则从右边向左写，如果竖写，则从上往下写。

埃及的某些纸草书一直保存到现在。在保存下来的纸草书中可以找到埃及数学概念的知识。

我们对两种纸草书特别感兴趣。一种叫做“莱茵特纸草书”，是按纸草书的原收藏者的名字命名的，这种纸草书保存在英国博物馆里。另一种叫做“莫斯科数学纸草书”。历史学家 Б. А. 士拉叶夫(1868～1920)在 1917 年和 В. В. 斯特卢威 (1891～1964) 在 1930 年对纸草书进行了研究。莫斯科纸草书保存在莫斯科国立普希金造型艺术博物馆里。这两种纸草书大约是在公元前

2000～前1800年写成的。但是莱茵特纸草书仅是另外文献的抄本，它大约是在公元前 3000 年写成的。

莱茵特纸草书，它另有一种名称叫阿默士纸草书（人们认为，这种纸草书约在公元前二十世纪由埃及人阿默士所抄写）。这种纸草书有着如此丰富的数学资料，以致完全可以把它当作数学方面的文献。

从上面提到的这些纸草书和保存到现代的另外的文献中，我们知道埃及人在数学计算时，不仅使用了数的写法，还使用了数学运算的某些符号。例如，用人的脚表示的符号，从右面开始表示加法，而用相同的符号从左面向右则表示减法。两个量的差用三个水平的箭头符号表示。猫头鹰的形象较多地用来代替"就是"一词，或者代替冒号，这个符号有时也可以表示为相等。

埃及人用逐次加倍的方法进行乘法运算。例如，8 乘以 8，他们的方法是 8 乘以 2，把得到的积再乘以 2，最后把得到的结果再乘以 2。如果 15 乘以 17，则应作下列运算：

$$
\begin{aligned}
15(1+2\times2\times2\times2) &= 15\times1+15\times2\times2\times2\times2\\
&=15+30\times2\times2\times2\\
&=15+60\times2\times2\\
&=15+120\times2\\
&=15+240\\
&=255
\end{aligned}
$$

把乘法的逆运算作为除法运算，即选择这样的数，当它乘以除数时得出被除数。

利用运算分数表示所有分数时，迫使埃及人不得不建立使用特殊的表，它把分子为 2 的分数表示成运算分数的和的形式。这种表如下：

莱茵特纸草书的分数表

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{17}=\frac{1}{12}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}$$

$$\frac{2}{19}=\frac{1}{12}+\frac{1}{76}+\frac{1}{114}$$

$$\frac{2}{21}=\frac{1}{14}+\frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{23}=\frac{1}{12}+\frac{1}{276}$$

$$\frac{2}{25}=\frac{1}{15}+\frac{1}{75}$$

$$\frac{2}{27}=\frac{1}{18}+\frac{1}{54}$$

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$$

$$\frac{2}{31}=\frac{1}{20}+\frac{1}{124}+\frac{1}{155}$$

$$\frac{2}{33}=\frac{1}{22}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

$$\frac{2}{37}=\frac{1}{24}+\frac{1}{111}+\frac{1}{296}$$

$$\frac{2}{39}=\frac{1}{26}+\frac{1}{78}$$

$$\frac{2}{41}=\frac{1}{24}+\frac{1}{246}+\frac{1}{328}$$

$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$$

$$\frac{2}{45}=\frac{1}{30}+\frac{1}{90}$$

$$\frac{2}{47}=\frac{1}{30}+\frac{1}{141}+\frac{1}{470}$$

$$\frac{2}{49}=\frac{1}{28}+\frac{1}{196}$$

$$\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$$

$$\frac{2}{53}=\frac{1}{30}+\frac{1}{318}+\frac{1}{795}$$

$$\frac{2}{55}=\frac{1}{30}+\frac{1}{330}$$

$$\frac{2}{57}=\frac{1}{38}+\frac{1}{114}$$

$$\frac{2}{59}=\frac{1}{36}+\frac{1}{236}+\frac{1}{531}$$

$$\frac{2}{61}=\frac{1}{40}+\frac{1}{214}+\frac{1}{448}+\frac{1}{610}$$

$$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$$

$$\frac{2}{65}=\frac{1}{39}+\frac{1}{195}$$

$$\frac{2}{67}=\frac{1}{40}+\frac{1}{335}+\frac{1}{536}$$

$$\frac{2}{69}=\frac{1}{46}+\frac{1}{138}$$

$$\frac{2}{71}=\frac{1}{40}+\frac{1}{508}+\frac{1}{710}$$

$$\frac{2}{73}=\frac{1}{60}+\frac{1}{219}+\frac{1}{292}+\frac{1}{365}$$

$$\frac{2}{75}=\frac{1}{50}+\frac{1}{150}$$

$$\frac{2}{77}=\frac{1}{44}+\frac{1}{308}$$

$$\frac{2}{79}=\frac{1}{60}+\frac{1}{237}+\frac{1}{316}+\frac{1}{790}$$

$$\frac{2}{81}=\frac{1}{54}+\frac{1}{162}$$

$$\frac{2}{83}=\frac{1}{60}+\frac{1}{332}+\frac{1}{415}+\frac{1}{498}$$

$$\frac{2}{85}=\frac{1}{51}+\frac{1}{255}$$

$$\frac{2}{87}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174}$$

$$\frac{2}{89}=\frac{1}{60}+\frac{1}{356}+\frac{1}{534}+\frac{1}{890}$$

$$\frac{2}{91}=\frac{1}{70}+\frac{1}{130}$$

$$\frac{2}{93}=\frac{1}{62}+\frac{1}{186}$$

$$\frac{2}{95}=\frac{1}{60}+\frac{1}{380}+\frac{1}{570}$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{99}=\frac{1}{66}+\frac{1}{198}$$

利用这个表可以进行任何分数运算。例如，如果需要作5除以21的运算，那么就要进行下列一连串的运算过程：

$$\frac{5}{21}=\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\frac{2}{21}=\frac{1}{21}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}=\frac{1}{21}+\frac{2}{14}+\frac{2}{42}$$

$$=\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}=\frac{1}{7}+\frac{2}{21}=\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{42}。$$

我们认为，这样长的过程，实际上有时比我们用简单的式子，用分数$\frac{5}{21}$来回答更为有益。例如有一个题：把 7 个面包分给 8 个人。解答的形式是$\frac{7}{8}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$。从式子中可以看出，应该把面包切成这样的几份：把 4 只面包每只切成两份，2 只面包都切成四份，一只切成 8 份。

我们在纸草书里找到了相当复杂的计算，不仅有整数计算，而且还有分数计算。

此外，我们述及的纸草书里还有其他部分的数学知识。我们在纸草书里发现的题目，有属于代数的，也有属于几何的。

在莱茵特纸草书里，有单独的一个部分记载的都是“计算若干”的问题。这一部分内容实际上是含有一个未知数的一次方程的题目。用“若干”或者埃及的“哈乌”(xay)代替我们的未知数。显然，“哈乌”所指的是若干谷物，即谷物的未知数量。

我们前面所述的象形文字的写法，就是这种方程式之一。这种写法的意思如下：

某数为若干，它的$\frac{2}{3}$、它的$\frac{1}{2}$、它的$\frac{1}{7}$，再加上这个数本身等于 37。

解答类似的方程是按一定顺序进行的：合并所有含未知数的项，也就是类似于我们合并同类项的运算，并且特别注意化成用运算分数表示。通常在解方程时，采取假设原理的方法，关于这个方法我们在谈到印度数学发展时再作介绍。

在纸草书里也遇到有关等差数列和等比数列的问题。数学史

上这样早就出现这些数学概念，显然说明在生活中经常见到这类序列。

下面就是纸草书里的一个等差数列的题目："100个面包5个人分，要使前三个人得到的面包是其余两个人的7倍"。题目的意思不是平均分配，而是每下一个人得到的面包总是比前面的人要少一定的个数。问这个差应该是多少？在纸草书里有着正确的答案。

在纸草书里表示等比数列的"阶梯"如下：写出一列数7，49，343，2401，16807，以及与这列数对应的有一列词"图画"，"母猫"，"老鼠"，"大麦"，"俄斗"。这里已经给出和数是19607。这种表示法是公比为7的等比数列。可以这样解释：有七个人，每人有七只猫，每只猫能吃七只老鼠，而每只老鼠吃七穗大麦，每穗大麦可以长出七俄斗大麦。从这个题目中可以写出怎样的一列数，它们的和是多少？

在纸草书里，还发现许多结合农业建筑和土地大小，求面积和体积的几何题。这里除了出色地解答难题以外，还能找到近似的解法。显然，埃及人已经知道求基本几何图形的面积和体积的精确方法，但是他们通常是采用近似方法计算的，在计算时运用了不准确的关系式。

例如，在莫斯科纸草书里有正四棱台体积的计算，计算的结果非常精确。在莱茵特纸草书里，用同样的方式很好地作出了圆面积的计算。纸草书的作者把圆的直径分成相等的九份，用其中的八份为边长作正方形，所得的正方形与这个圆是等积的。用这种方法计算圆面积，算出的结果与我们现在计算的结果不一样，因为它在计算时取π等于3.16。

但是，应该指出这种情况，所有这些值多半是具有经验性质的，即以解决文化生活中的问题所需要的知识为限。因此在书面文献中，我们没有找到任何的一般法则，而是把个别的性质用来解

答独立的题目，几乎没有任何的结论与进一步的证明。因此，我们不能说那时在巴比伦和埃及已经有了作为科学的数学。我们应该认为，在巴比伦和埃及出现了仅仅是数学知识积累的过程，在更晚的时候，所积累的数学知识才促进了数学科学的发展。

古代中国的数学

那时积累在古代巴比伦和古代埃及知识宝库中的数学知识，为近东和欧洲进一步发展数学作出了贡献，而产生于古代中国的最初的数学概念，则促进了居住在现在的朝鲜、印度支那半岛、尤其是日本这些邻国人民数学文化的发展。

中国的文化是世界上最古老的文化之一。公元前几千年中国人就已经很好地了解天体的位置。中国很久以来就有文字，印刷技术，中国人发明了指南针、造纸、瓷器，使用了自流井。

中国很早就开始积累了数学知识，出现了数的写法。那时中国象形数字的写法比埃及的写法还要复杂。但是，除了这些象形数字外，还有更加简单的应用于商业业务的数字符号，在中国得到广泛传播。

从外形看这些数字符号的形式如下：|＝1，‖＝2，|||＝3，||||＝4，|||||＝5，⊥＝6，┬|＝7，┬||＝8，┬|||＝9，0＝0。数的写法是自上而下的。中国的这种写数的方法有很大的优越性。为了表示缺位需要应用零。人们推测，零是在十二世纪从印度传过来的。

《九章算术》是非常古老的数学内容最有趣的文献之一。后来中国学者又对该书进行修订和补充，因此我们很难将该书主要正文与所作的修改加以区分，但是根据某些资料还是可以判断出原始的正文。这本书的内容比根据书名推测要宽广得多。因为在书里不仅有算术知识，而且还叙述了我们应该归于代数、几何、甚至三角的问题。

在《九章算术》里，把代数问题分成这些类型：第三章的内容是

若干人分财产的题目，并且主要表示数列部份的关系式。第四章的内容是开平方与开立方的问题。第六章是专供分配课税和求货物价值之用的。第七章是论及货物分配问题。例如有一个这样的题目："若干个商人买货物若干，如果其中每个商人付七个钱币，那么还缺四个钱币；如果每个商人付八个钱币，那么又多余三个钱币。要求商人数和货物数各是多少。"第八章是解方程，并阐明利用加法和减法的情况。内有一题："五头牛和两头绵羊共值十贯，而两头牛和五头绵羊共八贯。需要知道一头牛和一头绵羊的价格。"

在第一、五章和第四章的一部分，内有几何资料，并且在第一章里列举了各种形状的土地的测量方法：有三角形、四边形、圆和半圆。求三角形面积的方法，是用三角形的底边乘以高的一半，而求圆的面积给出了各种表达式，但是取数 π 等于3。在第五章里研究了求体积实际问题的各种情况，其中有求棱柱、棱锥、圆锥体积的题目。在第八章里叙述了解线性方程组的方法，这种方法与高斯的方法很相似。

在第九章里，我们还遇到了关于直角三角形的几何概念。

很久以前中国就已经把算盘作为通用的计算器。中国算盘的结构与现在俄罗斯商业算盘相似。所不同的主要是俄罗斯算盘是以十进位制为基础的，而中国算盘是5个与两个算珠合为一组为基础的。俄罗斯的算盘，在每一根平行的金属丝上串上10个算珠，而中国算盘则把每一档分成上下档两个部分，下档串5个珠，上档串两个珠。在下档拨上5个珠时，代替上档一个算珠。上档两个珠代替高一位上的下档的一个珠。

显然，这是二进位制在中国远古时代有它的地位的痕迹，在《易经》中所记载的一套记号里也发现这一点，这套记号被认为是从公元前三十世纪保存下来的。有人将它的发明硬算在当时中国的立法者伏羲身上。这种记号是64个图形的总和，每个图形都由

6 条横线组成。在每个图形中，除第一个图形外，都由完整的线段和分成两半的线段组成。这种记号的前 16 个图形的示意图如下：



这种记号在很长时间里无法解释，十八世纪著名的哲学家和数学家莱布尼兹才揭开这种记号的意义。他解释说，《易经》的图形表示从零开始的前 64 个数，所记录的是二进位制。我们所作出的这个表的部分，是表示从零到 15 的数。一条完整的线段表示 1，中间断了的线段表示零，并且下面的线条总是与我们所写的二进位制右面的数字相对应。例如最后的图形表示数 001111，即等于数 $1+2+2^2+2^3=1+2+4+8=15$。不过现代的数学史学家对莱布尼兹的这个解释提出异议。

如上所述，古代区分知识的复杂性阻碍了太古时代的中国发

展数学，建立更为精确的资料。然而我们从这个简短的论述中可以得出结论，在人类文化发展的初期，中国的数学远远领先于巴比伦和埃及。

第三章 常量理论的发展时期

古希腊数学的产生和发展

我们已经看到，在公元前几千年，一些古代东方国家已经把数学知识集成丰富的宝库。数学是由于实际的需要，在劳动过程中产生的，人们在劳动时必然会导致数和空间形式的建立和发展。发展农业，建筑灌溉工程、宫殿、教堂、金字塔，扩大商业和税收业务，航海的发展，所有这一切都对任何一种计划及数学的计算同时产生愈来愈新的要求。所有从计算业务和几何形式领域中出现的新知识，都是慢慢积累起来的。但是用经验的方法所获得的一切数学知识，还不可能得到应有的总结，也不能作出能适用于观察更加宽广范围现象相互联系的逻辑结论。古代东方数学是带有经验性质的。当逻辑总结的基本原理归入积累的实际资料中时，古代东方数学就成为以后发展整个数学体系的奠基石。

有些历史学家指出，数学科学是很久以后在地理上与埃及和巴比伦相邻的另一个小国中产生的，他们认为这个国家是希腊。我们不能同意他们的看法。希腊人从东方民族承袭了数学科学的基础。因此我们应该认为，希腊数学是东方人所产生的那种思想发展的直接延续。我们没有可靠的资料来说明，在什么时候哪些人作出了第一批概括的结论，或者最早作出了空间关系论断的证明，但是我们或多或少有公元前七世纪的类似数学结论的可靠资料。从这个时期开始，在希腊和它的移民区出现一系列哲学数学的学派，正如人们认为的那样，学派内部在逻辑科学的结论方面曾经造就了第一批还很胆小的出头人。

虽然埃及和巴比伦的祭司们细心地隐瞒了他们所知道的知识，不让别人知道，因为耽心说出来会损害自己的威信，损害自然秘密的唯一拥有者——上帝的仆人的威信。但是这些知识，有时透过祭司的重重障碍传播了出去，甚至有时流传到埃及和巴比伦的境界以外。特别是，希腊和它的移民区中的商人，为了进行各种贸易业务经常去埃及，在这种情况下，有时就有可能渗透到埃及教堂里，用种种方法打听到祭司的某些保密的知识。这样的人之一是爱奥尼亚哲学学派的创始人——泰勒斯。

泰勒斯的爱奥尼亚哲学学派

泰勒斯(约公元前 624～前547)生于米利都城，这个城是小亚细亚的爱奥尼亚沿岸希腊的移民区。他的一家都生在腓尼基，但他是希腊血统的混血儿。泰勒斯从事商业，由于职业的需要经常去埃及，在那里他顺利地了解到埃及祭司拥有的知识。顺便说说，泰勒斯访问埃及的时候，轻而易举地解决了祭司无法解决的算题，即他能够测量埃及一个金字塔的高度。人们认为，泰勒斯的测量是以相似三角形性质为基础的；他选择这样的时间进行测量，即当太阳光线投射成 45°角时，也就是说，这时垂直放置的物体的阴影的长度等于物体的长度。泰勒斯测量了金字塔影子的长度，这样就判明了金字塔的高度。这种测量物体高度的方法，大概在祭司中产生了很大的影响，泰勒斯的智慧超过了祭司们。但是，泰勒斯汲取埃及天文学知识为基础所作的其他事业，超过了他的同时代人，具有更大的影响。公元前 585 年 5 月 28 日泰勒斯准确地预报了日食开始的时间。诸如此类的事实，使泰勒斯名声大振。

泰勒斯在诞生地米利都建立了哲学学派，他的主要论点是主张一切存在物的起源要归功于水，一切都是由水形成的，一切事物的本质都依水的状态而改变。同时，泰勒斯是希腊自发的唯物主义哲学的创始人。我们在泰勒斯的学说里，第一次遇到对自然界

整个过程作了纯正的物理解释，这个解释完全与宗教的解释无关。对自然现象的观察使泰勒斯作出了关于水的作用的最重要的结论："植物的生命保存在它的汁液里，因为植物干燥了就会死；动物的生命保存在血液里，甚至火焰也要吸取湿润。"

历史上泰勒斯的哲学学派称为爱奥尼亚学派。但是人们曾经不正确地认为，泰勒斯的学派所深入研究的仅仅是哲学内容的问题；相反，泰勒斯非常有兴趣地对自然界的各种现象作了经验主义的研究，以此为基础，他已经作出了几个宇宙起源论性质的哲学结论。例如，他想象地球象平坦的物体一样漂浮在水面上。这时，他独创地解释了地球表面地震的起源，认为这是水振动的结果。在他的学派著作中，天文学问题占了不小的地位。这一点甚至从泰勒斯最亲近的学生安那西曼德（约公元前 610～前 546）和他的信徒安那西米尼（约公元前 585～前 525）对宇宙构成的许多问题给予很多的注意，也可以看出来。

爱奥尼亚学派在发展数学方面起了很大的作用。泰勒斯学派写出了数是若干个1之和的算术基本定义。然而在数学发展史上，泰勒斯的几何著作的作用特别大。人们认为他是第一个几何学家。泰勒斯学派确立和证实了为人们公认的第一批几何定理，它们是观察的总结和逻辑证明的需要。例如，根据历史学家的考证，我们可以肯定地说，泰勒斯已经知道下述原理：直角彼此相等；等腰三角形的底角相等；圆的直径等分圆周；如果两个三角形有一边及这边上的两个角对应相等，那么这两个三角形全等。历史上把这种情况下两个三角形全等的判定定理，叫做泰勒斯定理。泰勒斯应用这个定理求到不可到达物体的距离（例如，求从岸上一点到海中一只船的距离）。求法如下（图 1）：设

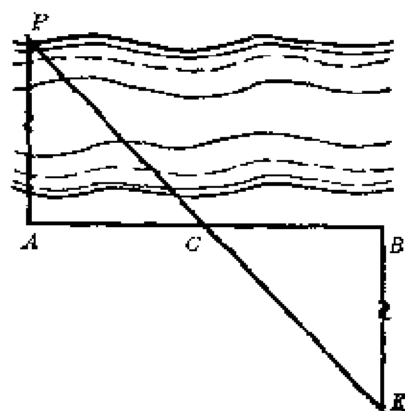


图 1

A是观察点，船在A的正前方P。由点A在岸上作AP的垂线，在所作垂线上截取任意长线段AB。再作AB的中点C。观察者沿垂直于AB的直线BK走，一边走一边看船P。走到点K，由点K观测使船和点C成一直线时，观察者的位置就确定了点K。根据三角形全等定理可以证明，三角形ACP和BCK全等。因此所求距离AP等于线段BK，BK这条线段的长是可以直接测量的。

泰勒斯学派为平面上线与角的理论奠定了基础。这个学派把用科学的方法对待数学真理的一些初步含意，载入了数学的史册。但是，在这段历史里，所涉及到的还是一些非常狭窄的问题，直到现在，关于用怎样的方法证明几何的某些基本论点的资料，并没有得以保存下来。

泰勒斯在暮年时突然死去。历史学家肯定地说，在他的坟墓上刻有题词："这位天文学家之王的坟墓多少小了一些，但他在星辰领域中的光荣是颇为伟大的。"

在希腊另外一个叫做毕达哥拉斯学派的那里，数学得到了进一步的发展。

毕达哥拉斯学派

毕达哥拉斯出生在靠近爱奥尼亚沿海的撒摩斯岛上。关于毕达哥拉斯本人有相当多的传说，但很难判断，哪些传说至少在某种程度上是符合实际情况的，哪些是虚构的。我们连他准确的出生和死亡的日期都无从知道。根据有些资料，毕达哥拉斯生于公元前约580年，死于公元前500年。

毕达哥拉斯青年时代游历了许多地方，能够很好地了解埃及和远古时代祭司保存下来的，几乎未经变动的那些数学知识。总而言之，毕达哥拉斯在埃及居住了大约22年。由于皇帝的朋友希腊人波里克拉德介绍他与埃及皇帝阿玛齐斯相识，所以那里的祭司对毕达哥拉斯相当友善。

大约在公元前 530 年，毕达哥拉斯从埃及回国以后，在祖国建立了自己的学派，它是以贵族式的观念形态作为基础的，与当时撒摩斯岛的古希腊民主制的观念形态，有着尖锐的对立。因此，这个学派引起了撒摩斯公民的不满情绪，毕达哥拉斯不得不离开了祖国。他前往希腊的移民区阿佩宁半岛，并定居在克罗托那城。在那里重新建立起学派（毕达哥拉斯联盟）。

关于数的神秘学说奠定了毕达哥拉斯联盟的哲学基础。毕达哥拉斯派认为，数是现实的基础，是严整性和次序的根据，是在宇宙体系里控制着天然的永恒关系。数，这是世界的法则和关系，是主宰生死的力量，是一切被决定事物的条件。事物的实质是仿效着数做出来的。

毕达哥拉斯联盟对数如此崇拜，说明他们对周围生活现象进行了观察，同时给数以神秘的观点。毕达哥拉斯联盟的数的雏形是借用了近东一些国家数学知识的基础。

例如，毕达哥拉斯学派在悦耳的音乐中，觉察了“和声的”谐音，并注意到在用三根弦发音时，这三根弦的长度之比为数 3，4，6 时，就得到和声的谐音。毕达哥拉斯学派在许多其他的场合也发现了同样的比例关系。例如，立方体的面数、顶点数、棱数的比，等于数 6:8:12。研究用同名正多边形覆盖平面的问题，毕达哥拉斯学派找到了这种覆盖只有三种情况：绕平面上一个点可以紧密地放六个正三角形，或者四个正四边形（正方形），或者三个正六边形（图2）。

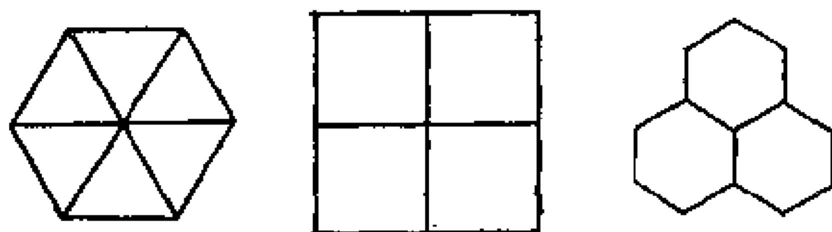


图 2

如果注意到这三种情况的正多边形的个数，那么我们可以看到，多

边形个数的比等于 6:4:3，如果我们取这些多边形边数的比，那么，它们等于 3:4:6。

毕达哥拉斯学派根据类似的观察更加确信，整个宇宙的现象完全依附于某种数值的相互关系，也就是存在着“宇宙的和谐”。

毕达哥拉斯学派认为，例如从地球到宇宙空间天体的距离由某种比例确定。他们以这一点为基础，开始细心地研究比例。于是，他们除了研究算术级数与几何级数以外，还研究了所谓的“调和”级数。①

由于毕达哥拉斯学派赋予数这样巨大的意义，所以他的学派非常注意研究数，也就是开始研究数的理论。但是在这里，象那时在整个希腊一样，对哲学学派来说，计算的实际应用被认为是不成体统的事，是为“最低层的”人们提供日常生活和事务上的相互关系。当时人们把这种计算的实际应用叫做“逻辑斯提”②。毕达哥拉斯说过，他把算术放在“高于商业需要的”地位。因此，毕达哥拉斯学派研究的只是数的性质，而不是实际的计算。然而必须注意到，毕达哥拉斯或者他的信徒，在希腊使用了更加方便的记数系统。采用了腓尼基人用希腊字母表中的字母和增加某些腓尼基的字母来表示数。字母表前九个字母表示 1～9 的数，9 以下是几个 10(10，20，30，……90)，最后是几个 100(100，200，300，……900)。为了把数与字母区别开，在数的上面画一条横线。这样，为了写数规定了下列的符号：

1——$\bar{\alpha}$	4——$\bar{\delta}$	7——$\bar{\zeta}$
2——$\bar{\beta}$	5——$\bar{\varepsilon}$	8——$\bar{\eta}$
3——$\bar{\gamma}$	6——$\bar{\varsigma}$	9——$\bar{\theta}$

① 如果三个数的倒数组成算术级数，那么这三个数组成调和级数。例如，数 3，4，6 组成调和级数，因为它们的倒数 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{6}$ 组成算术级数：$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$。

② 在古代，逻辑斯提的意思是计算技能。——译者注

10——$\bar{\iota}$	40——$\bar{\mu}$	70——$\bar{o}$
20——$\bar{\kappa}$	50——$\bar{\nu}$	80——$\bar{\pi}$
30——$\bar{\lambda}$	60——$\bar{\xi}$	90——ϟ(科帕)

100——$\bar{\rho}$	400——$\bar{\upsilon}$	700——$\bar{\psi}$
200——$\bar{\sigma}$	500——$\bar{\varphi}$	800——$\bar{\varpi}$
300——$\bar{\tau}$	600——$\bar{\chi}$	900——ϡ(萨姆皮)

为了表示若干千的数,应用了下面的补充记号:在数的前面放一个逗号表示若干千,在数的前面放一个点表示若干万。因此,数128写成 $\bar{\rho}\bar{\kappa}\bar{\eta}$, 数3000写成$,\gamma$。为了表示分数,把表示分子和分母的数依次写成一行,用重复的数表示分母,并在分子的右上角加一撇,在分母的右上角加两撇。例如,1/2写成 $\bar{\alpha}'\bar{\beta}''\bar{\beta}''$。

我们首先遇到了毕达哥拉斯学派的数的分类,但是这种分类带有非常特殊的性质,是以几何设想,或哲学神秘性质的抽象设想为基础的。它把正方形作为几何图形的单位。当把正方形的每条边分成相等的份数时,经过每个分点作直线,把基本正方形分成更小的正方形,那么这些小正方形的总和表示"平方"数4,9,16等等。类似地表示"平面"或者"矩形"数,即把一个数分解成两个不等的因数:它们被表示成矩形的形式,再分成相应的正方形的个数。例如,数6表示边长为2单位和3单位的矩形。在这种情况下,组成数6的因数是2与3,这两个数叫做数6的边。类似地得到"立方"和"立体"数。能分解成三个相等的因数的数叫做立方数,把一个数分解成不相等的三个因数,叫做立体数。数1,3,6,10,15叫做"三角形数"。用把自然数列前几个数相加的方法,就可以得到三角形数,如1,1+2=3,1+2+3=6,1+2+3+4=10等等。因为他们把圆排列成三角形的形状,依次求圆的总和,用这种方法得到的数,所以授于它们"三角形"数的名称(图3)。

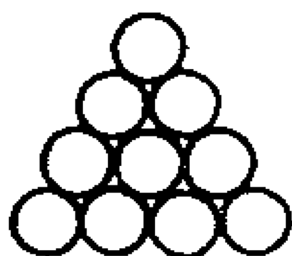


图 3

此外，把整个自然数列分成偶数——“男人的”，奇数——“女人的”。如果一个数除其本身外的所有因数的和等于这个数，那么这个数就叫“完全”数。例如数 6 是完全数，因为它的因数 1，2，3 的和是 6。如果两个数中每个数的因数的和等于另一个数，具有这种性质的数叫做“相亲”数。可以断言，毕达哥拉斯的拥护者回答了这样的问题：“谁是我的朋友，这就是象数 220 和 284 一样”。我们可以验明，这两个数的确是相亲数。事实上，220 的因数是 1，2，4，5，10，11，20，22，44，55，110，而 284 的因数是 1，2，4，71，142。容易检验，第一个数的所有因数的和等于 284，第二个数的因数的和等于 220。

数 7 和 36 在毕达哥拉斯学派那里具有特殊的意义。尊敬数 7 是因为巴比伦人给它增添了神秘的意义，这一点又从巴比伦传到了毕达哥拉斯学派。至于数36，则是它的性质对毕达哥拉斯产生了强烈的印象：一方面这个数表示自然数列前三个数的立方和($1^3+2^3+3^3$)；另一方面，这个数又是自然数列前四个偶数与前四个奇数的和$(2+4+6+8)+(1+3+5+7)=36$。

按照毕达哥拉斯学派的看法，整个宇宙是建立在前四个奇数和前四个偶数基础之上的，他们认为用数 36 作的誓言是最可怕的誓言。

毫无疑问，给数添上了神秘的意义在数学史上仅仅是起了否定的作用。但是毕达哥拉斯学派的数的几何概念促进了数学的发展。

由于表示数的这种几何形式的方法，与它们代表的数融合在一起，所以由数的理论得出许多作为几何想法的结果而产生的结论；反过来，算术的关系导致了某些几何的总结。例如，从自然数 1 开始的连续奇数的和，总是给出平方数，或者某个平方数总等

于若干个连续奇数的和。因而在毕达哥拉斯学派里发展了几何算术，与此同时逐渐地建立了几何代数。当然，这种代数与现在的代数相比，具有完全不同的性质。因为它不具有现在代数的基本优点，也就是不具有现在代数中的符号体系。几何代数的特性是：它的所有结论都是以几何想法为基础的。因而用下列的作图来简化乘法公式的结论。

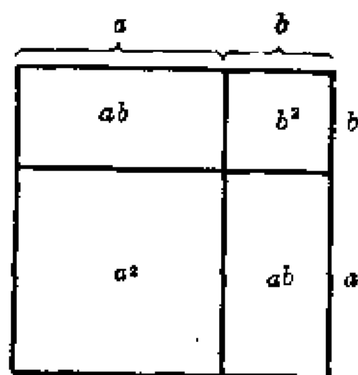


图 4

1．"两个量的和的平方"的公式(图4)。作正方形，使它的边长等于线段 a、b 的和。过线段的分点作直线平行于正方形的边。从图中可以看到：

$$(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2。$$

2．"两个量的差的平方"的公式(图5)。作正方形，使它的边长等于线段 a、b 的差。在正方形内作直线平行它的边，如图所示。我们得到下面的几何关系式：

$$(a-b)^2=a^2-ab-ab+b^2$$
$$=a^2-2ab+b^2。$$

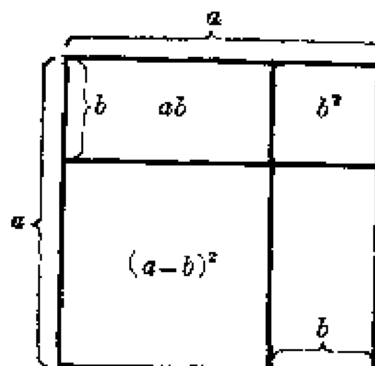


图 5

上述的方法现在成为恰当的直观图形，它是简单乘法公式的代数证明。

可能毕达哥拉斯学派用几何方法作出了二次方程的解。公元前三世纪的欧几里得在《几何原本》里发展了这种方法，因此我们在后面再作详细研究。

毕达哥拉斯学派对几何性质的问题特别给以注意。欧德莫是首批几何历史学家之一，他对毕达哥拉斯的几何著作曾经作出评论："毕达哥拉斯把几何科学改变成自由学说的形式，因为他分析

了几何最根本的原理，并用非实质的和合理的方法研究了它的定理。”

正是由于把几何问题与数的性质问题结合起来的难能可贵的思想，减轻了毕达哥拉斯学派对几何性质问题的工作。当时，得到了双重的利益：数的理论很好地用几何图形说明，几何同样地也得到了相互关系的必要说明。用这种独立的几何证明方法，由依次因数的积产生出正方形和矩形面积的定义，而用几何图形的数的概念（平面的、正方形的、三角形的、立体的数），产生出关于正多边形作图问题，然后是正多面体的作图。在这一方面，具有特别重大意义的是毕达哥拉斯学派首先完成了正五边形的作图。正多边形作图题帮助了作正多面体，并且毕达哥拉斯学派曾作出了所有可能的正多面体：具有四个等边三角形面的正四面体，具有八个等边三角形面的正八面体，由 20 个正三角形围成的正二十面体，由 6 个正四边形围成的正六面体，最后是正十二面体，即由 12 个正五边形围成的几何体。解决了象正多边形与正多面体的作图这样困难的题目，当然对解题者产生了强烈的影响。解决了这些问题之后，毕达哥拉斯学派给上述多面体加上了神秘的意义。他们认为这些都是“宇宙图形”，根据希腊人以现实作为基础的概念，给每个图形都命名成为四大元素之一：四面体命名为火，八面体命名为气，二十面体命名为水，六面体命名为土，十二面体命名为宇宙。他们认为在整个几何体中最优美的是球。

毕达哥拉斯认为，地球是球形的，宇宙的中心是一团火，而不是太阳，地球绕着这团火旋转，而且太阳、月球、行星具有区别于恒星一昼夜移动的自转。

应该认为，毕达哥拉斯学派对几何学的另外一些领域也有十分渊博的知识，他们已经知道三角形的全等定理，平行线理论，三角形的内角和，相似理论；他们会利用等积图形的作图方法和立体几何的基本原理。毕达哥拉斯最重要的发现之一是证明了直角三

角形两条直角边与斜边之间关系的定理，就是历史上有名的“毕达哥拉斯定理”[①]。

通过对几何图形的算术计算，如果用有理数表示直角三角形各边的长，较小的直角边用奇数表示，那么就能成功地找到用数表示直角三角形各边之间关系的简单表达式。如果较小的直角边等于a，那么另一条直角边与斜边分别为$\frac{a^2-1}{2}$与$\frac{a^2+1}{2}$。

作直角三角形以及正多面体，用几何作图解二次方程，都产生了线段的比既不能用整数，也不能用分数表示的情形。这样一来，毕达哥拉斯紧接着就开始研究无理数的概念。但是这个最伟大的发现，给予他们的哲学以较大的损害：找到了不隶属于通常的数关系法则的量。例如，直角三角形的两条直角边长都是1，它的斜边不可能用任何的数表示，毕达哥拉斯发现这个数既不是整数，也不是分数。这样的发现与他们的数的概念十分不一致，以致毕达哥拉斯力求避而不谈这种数。在这一方面，毕达哥拉斯学派的唯心论哲学，使数的概念的发展拖延了很长时间，致使数学受到较大的损失。

毫无疑问，毕达哥拉斯学派对于改进解数学问题的科学方法，发挥了很大的作用。显而易见，毕达哥拉斯学派确立了论证数学方法的最重要方面之一，也就是：规定在数学中必须坚持严格证明，这就给数学增添了特殊的科学意义。

但是，以毕达哥拉斯联盟的活动为基础的思想体系，使这联盟终于趋向灭亡。问题在于联盟的成员主要是由贵族代表组成，他们的指挥中心在克罗托那城。这就有可能给予联盟的政治生活以很大的影响，并且这个影响有利于贵族，其实在雅典，在希腊移民区的大部分地方都成立了大部分人和大多数的拥护者都参加的

---

① 还在毕达哥拉斯以前，某些古代人们（埃及人、中国人、印度人）都知道这个定理的部分情况。定理的证明毕达哥拉斯没有保存下来（B. Д. 奇斯佳科夫注）。

民主管理委员会。当然，民主潮流开始站在克罗托那一边。毕达哥拉斯与自己的拥护者应当离开那里，但是这也未能挽救毕达哥拉斯本人。他住在他林敦城的时候，在与对手的冲突中丧生了。

毕达哥拉斯联盟瓦解以后，毕达哥拉斯的学生们散布在希腊的各个城市，但他们中间的大多数人都在雅典。

公元前五世纪雅典的数学

公元前五世纪，雅典成为哲学和数学思想发展的中心，同时，哲学与数学紧密地联系在一起，因此我们不能说，那个时期的数学完全不涉及哲学性质的问题。

在那时候，数学思想的优秀代表都集中在雅典，泰勒斯学派的追随者之一安那克萨哥拉（大约公元前500～前428）曾在雅典工作，他首先提出了无穷大量与无限小量的数学概念。从阿布提拉城来的唯物主义者和原子论者德谟克利特的伟大哲学思想在这里得到了推广。也在这里，埃利亚人① 芝诺的思想有所发展。

各种哲学思想之间的争论和斗争，促进了哲学和数学的基本概念更加深入，更加准确。

此外，公元前五世纪雅典正处于古希腊民主制思想的兴盛时期：民主制普及到奴隶占有制国家所能发展的程度。民主制原则只对希腊居民实行，而绝不推广到奴隶。至于希腊居民，民主主义对于他们也是片面的，因为只有男人才能参加国家管理和全权的选举。但是甚至在雅典的那种选举制度还是促进了参加社会会议的人们，为坚持自己的信仰而应该学会正确地思维和准确地表达自己的思想。因此在其他的科学中，哲学、数学和雄辩术（演说术）获得了占优势的意义。

形象地说，数学在雅典从独特学派的闭塞围墙里跳到了宽广的天地里。它成为人民的财富和社会生活的因素，这是科学发展

① 埃利亚是意大利的古代城市。

过程中良好的重大进展。但是另一方面，数学的逻辑方向被提到首要地位。因而数学就开始愈来愈多地脱离实验的基础，脱离生活。主要努力倾注在概念的深化和方法的论证上。在这期间，特别强调把算术与逻辑区分出来的意图。很多数学家依靠自己的唯心主义哲学观点，彻底拒绝了作为科学的逻辑斯提。

逻辑斯提开始用算盘以简单的计算作为基础，使用类似于俄罗斯人商业算盘的计算器，这种计算器是一块带有刻度的木板，刻度相当于俄罗斯算盘上的金属丝。并且使用一个个的小石子代替俄罗斯算盘上那种串在金属丝上的算珠。

数学哲学上引起很大理论争论的主要问题之一，是关于量的整除性问题。安那克萨哥拉断言，在小的量中不存在最小的量，而是可以不断地减少，因为存在的东西是不能中止存在的。因此，根据安那克萨哥拉的观点，一件东西可以无限分割，所分出的任何部分总是大于零。

与安那克萨哥拉的理论相反，芝诺（约公元前 500～ ?）提出了以唯心主义哲学为基础的理论。很明显，他想证明依靠经验的科学，即"俗人的"科学是不完善的，它的根本原理是虚假的。芝诺认为，如果一件大长度的东西经过无限分割，结果终归仍旧是大长度的一个微粒，那么无限大数的微粒之和不可能得出有限的量，而是得出无限大的量，因为，许多个别的东西之间总还有个东西（即东西与间隔之间的区间）。芝诺提出了他的著名的悖论（Апория）①，他认为这些悖论证明了不可能无限分割，要不然就是不存在运动。

例如，关于阿基里斯与乌龟赛跑的悖论指出，快跑能手阿基里斯是不可能追上在他前面爬行的乌龟。因为当阿基里斯追到那个乌龟开始所处的地方的时候，乌龟已经向前爬行某段距离。关于

① Апория（来自希腊语——无办法的）涉及不可抗拒的逻辑困难，矛盾。（В.Д.奇斯佳科夫注）



德谟克利特

飞矢的悖论论证，从弓里射出来的箭，总是静止的。这个论断的基础是这样一个设想，即如果把时间分成无限个部分，即“现在的瞬间”，那么每一个这样的时刻，箭应该处在完全确定的地方，即在静止状态。而因为时间由这样的时刻组成，所以箭经常处于静止状态。

芝诺和其他哲学家涉及大长度量的可除性问题的形而上学思想，有助于产生和发展严格的原子论的唯物主义理论，德谟克利特(约公元前460～前370)是原子论杰出的代表。可惜德谟克利特的原著没有能保存下来，关于他的著作，我们只能根据较晚作者的意见和某些片断来评论。

德谟克利特对数学采用了原子论的理论，获得了良好的结果。同时他拟订了进一步对无穷小量进行数学研究的方法。德谟克利特否定无限整除性，并认为一切整体都由离散的单位组成，量由最初的量组成。从这个观点上看来，例如直线是由直线的基本线段组成。圆象直线一样，也是由最小的线段组成的，虽然线段数不是无限的，但是它的大小不可能进行计算。德谟克利特成功地把自己的原子论的理论运用到立体几何里，使他能求出某些空间图形的体积。

雅典原子论的思想在数学家中间有许多拥护者。其中之一是诡辩者安提丰(公元前五世纪下半叶)。安提丰在求圆面积的问题上，发展了原子论的思想。他认为，如果在圆里内接一个正三角形，然后依次把内接图形的边数倍增起来(成为内接正六边形，12

边形等等)，那么这个过程总是有限的，因为内接多边形的顶点，归根到底占用圆周上所有的点，所以最后得到的多边形与圆相符合。由此，根据安提丰的看法，因为总是能够给多边形作出等积的正方形，所以能够解决化圆为方的问题。虽然安提丰的推论是不正确的，但是他的解法在数学方法的发展方面有很重要的地位。第一，在安提丰的解法里包含了解答方圆问题的最初的一个意图，即作一个与圆等积的正方形。这个问题是古代数学家所提出的最重要问题之一。第二，安提丰所运用的上述方法，后来更加完善，在解几何问题时产生了重要的成果。这个方法获得了"穷竭"或"耗尽"法的名称。安提丰把穷竭归结为一步一步地穷竭圆面积，即内接三角形的面积填满圆面积的一部分；6 边形的面积已经填满了这个圆面积的大部分，这样随着多边形边数的增加，多边形的面积越来越填满圆的面积，末了，最后的多边形耗尽了整个圆的面积。

与安提丰同时代的人勃利颂，除了采用内接多边形的方法外，还采用了外切多边形，改进了求圆面积的方法。同时勃利颂认为，圆的面积等于它的内接多边形与外切多边形面积的算术平均数。

安提丰另一个同时代的人希波克拉提斯·希奥斯基颇多地促进了几何思想的发展。他曾写成了第一部系统的几何学教科书，叫做《几何原本》。但是这部著作没有保存到今天，我们只有从较晚的一些作者的作品里，知道他的某些著作。希波克拉提斯也是力求获得化圆为方的解法，他成功地解决了一个题目，根据他的意见，这个题目表明了化圆为方的可能性。这个题目以"希波克拉提斯的月形"为名载入数学史册。这个题目是：如果用直角三角形的斜边为直径作半圆，再以两条直角边为直径，分别在三角形的外面作两个半圆，那么包含以直角边所作的半圆与以斜边所作的半圆之间的两个月形（即画有斜线的）面积的和与原三角形面积相等（图 6）。因此希波克拉提斯得到所证明的定理，

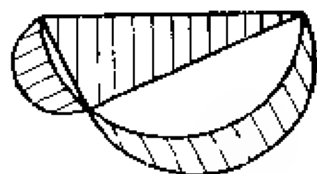


图 6

曲线图形与直线图形等积。这个正确的结论导致希波克拉提斯对圆面积的错误认识，他相信圆的面积也可以等于某个正方形的面积。

希波克拉提斯的名字与试图解另一个古代有趣的问题联系在一起。他力求找出作一个立方体，使它的体积等于已知立方体体积两倍的方法，即立方倍积问题。同时人们认为他是数学里反证法的始祖，即在解所提出的问题时，把问题化为更加可行的① 另外的方法去解。在立方倍积问题里，如果所给立方体的棱是已知的，那么问题是找出两倍体积立方体的棱。希波克拉提斯指出，这个问题可化为求所给棱 a 的值与这个值的两倍，即 a 与 $2a$ 之间的两个比例中项。因此为了求出这个未知的两倍立方体的棱 x，可以再引进一个辅助未知数y，利用比例式$a:x=x:y=y:2a$。这个比例把立体几何问题化为在平面上作图的问题。就是说，由所给的比例可以得到这种类型的依赖关系，$x^2=ay$，$y^2=2ax$；由此$x^3=2a^3$。当然，根据几何方法用圆规和直尺作 x，毕竟是不可能完成的。

雅典学派

公元前五世纪和四世纪之间，希腊科学的哲学思想主要集中在雅典的两个科学机关里，即柏拉图科学院和亚里士多德的吕园。

柏拉图（公元前 427～前347）出生于贵族家庭，在社会政治观点上，他是民主制的反对者。他的思想体系，完全符合于他周围人们所培养出来的阶级本质。他不仅领导对自己的反对者即与民主派作思想斗争，有时甚至积极参与，企图推翻民主体制。

柏拉图具有突出的才能，又拥有大量钱财，这就使他能够到各

---

① 在逻辑学里，如果某个命题是用反驳其对立命题的方法证明的，那么这种间接证明叫反证法。在数学里，反证法与穷举法相似。“穷举法”的术语仅在十七世纪才被格列库尔·圣·弗沙所引用。

处游历和认识很多科学工作的代表，特别是认识了毕达哥拉斯学派的追随者和他们的学说。柏拉图建立了自己的哲学，它在许多世纪里成为科学上唯心主义的基础。柏拉图在雅典建立起来的学派，对他的哲学的产生和扩大影响具有很大的意义。这个哲学数学学派建立在雅典的名为科学院的花园里，因此这个学派名之为科学院派。柏拉图本人曾经是哲学家苏格拉底的学生。苏格拉底不重视数学，他认为数学只要满足最低的需要就可以了。按照他的看法，要求满足商业、农业等等的需要，但是不可能成为学习和研究的对象。可是柏拉图没有继承自己老师的这种观点。柏拉图在旅行时结识很多朋友，其中有在当时科学上最进步的人们。柏拉图在以后把他们中间的某些人吸收到科学院工作，并且在许多方面促进了科学院的繁荣。柏拉图与毕达哥拉斯学派的代表结识，对发展柏拉图的哲学具有特殊的影响。柏拉图从毕达哥拉斯学派那里吸收了数学上升时的观点，并运用到自己的学说中，因此柏拉图的哲学提高了对数学科学的兴趣。柏拉图认为，不知道数学的人，不可能接受哲学知识，因此当进入科学院时就可看到题词："不知道几何学的人不准入内"。这样，在柏拉图学派里数学占有重要的地位。然而在柏拉图本人的著作里没有出现任何有关数学思想的发展情况。其实，大家所知道的柏拉图学派在这方面的成就，不能说成是柏拉图本人的，然而无论如何这些成就是属于他的学生的。例如系统地运用分析方法，也就是这样的推论方法：假设所求的未知数已经知道，再以这个假设为基础，得出已知量与未知量应当存在的关系式的结论，归根到底是化为求未知量。顺便提一下，柏拉图学派把这个方法运用在几何作图的问题上，利用圆规和直尺就可作出图形。这里，解几何作图题的那部分内容首先得到证实，并在实际上保留到现在。在科学院里同时也研究了几何轨迹的方法。柏拉图学派作出许多几何定义。例如，点定义为直线的开端。也许，在这里已为点作出了定义，点是线的界限，线



攸多克萨斯

是平面的界限，平面是体的界限，把几何体定义为有三个向度。

科学院对古代三个有趣问题的解法给予很大的注意。其中两个问题我们在前面已经提到，就是化圆为方，立方倍积问题。第三个问题是角的三等分。也就是作一个角等于已知角的三分之一的几何作图题。现在已经得到证明，这三个问题用尺规作图[①]的方法是无法解决的。古代人们并不知道这样的作图是不可能的。初看起来很简单的问题，却找不到解，这就格外引起了他们的注意。

柏拉图学派在科学院里，研究了棱柱、棱锥、圆柱和圆锥。总之，推动了几何学的发展。所以追随柏拉图学派的几何学家，不仅在雅典，而且在遥远的国外也能见到。例如，在马尔马拉海（布罗奔尼撒）南方沿岸基齐克城，攸多克萨斯（约公元前 408～前 355）建立起纯几何学派。这个学派与柏拉图的科学院有联系，因为攸多克萨斯自己有很短一段时期曾经是科学院的学生，而后来还与自己的学生一起访问过科学院。

攸多克萨斯对穷竭法作了补充，使它更加完善，这方法的最初迹象我们在安提丰那里见到过。依靠这个方法，攸多克萨斯在立体几何领域里获得了很多新的关系式。例如他曾经证明，棱锥的

① 关于立方倍积，三等分任意角的问题，利用圆规、直尺作图无法解决的严格证明，是法国数学家 P. 万采尔在 1837 年首先提出来的。关于化圆为方的问题用上述方法无法解决，是德国数学家 F. 林德曼在 1882 年得到证实的（В. Д. 南斯佳科夫注）。

体积是等底等高棱柱体积的 1/3。对于圆锥和圆柱也作出了类似的关系式。此外，攸多克萨斯指出，两个圆面积的比等于它们半径的平方比。

攸多克萨斯还深入研究了比例，等分线段的极限，比例中项的问题，尤其是研究了"黄金分割"，即把一条线段分成两部分，全线段的长比它长的部分等于长的部分比短的部分。

后来在柏拉图科学院工作的大几何学家门内马斯（公元前四世纪）脱离了攸多克萨斯学派。门内马斯发现圆锥线的三种形式，有时也叫做门内马斯的三合一。他通过用垂直于锥面一条母线的平面去截圆锥，研究三种曲线：椭圆、双曲线和抛物线。为了得到上述各种曲线，他选取了各种圆锥：相对两条母线之间的夹角是锐角的圆锥，用平面去截得到的是椭圆，相对两条母线之间的夹角是钝角的圆锥，用平面去截得到的是双曲线，相对两条母线之间的夹角是直角的圆锥，用平面去截得到的是抛物线。门内马斯顺利地得到表示研究曲线性质的很多关系式。例如，如果已知是一条抛物线，那么由曲线上任意点 M，向对称轴 AB 所作的垂线 MK 的平方，与以 AK 及 AB 为边的矩形等积，其中 AB 是由所给的抛物线完全确定的线段（图 7）。如果这种关系用解析式表示，就得到方程

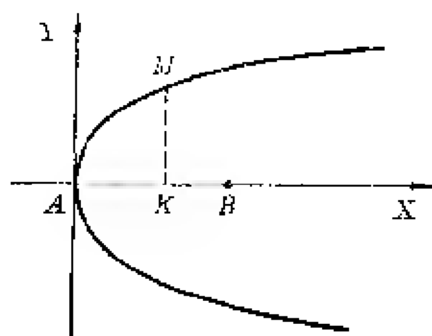


图 7

$$KM^2 = AK \cdot AB.$$

如果把抛物线的对称轴和通过抛物线的顶点并与它正交的直线作为坐标轴，那么我们现在所写的抛物线的方程就代替了上面的方程。把 ox 作为横坐标轴，把 oy 作为纵坐标轴，我们得到方程

$$y^2 = ax。$$

其中 a 对已知抛物线是常量。

门内马斯根据抛物线的性质，利用希波克拉提斯的比例，提出了立方倍积问题的特殊解法。我们可以从希波克拉提斯的比例 $a:x=x:y=y:2a$ 得到两个方程 $x^2=ay$，$y^2=2ax$。在方程里可以把 a 作为已知立方体的棱，x 作为2倍立方体的棱。从两个方程里消去 y，求出 x。这就意味着在几何上应该作两条抛物线：一条抛物线的方程是 $x^2=ay$，以坐标轴 oy 为抛物线轴，另一条抛物线的方程是 $y^2=2ax$，是以坐标轴 OX 为抛物线的轴（图8）。两条抛物线的交点 M 在 OX 轴上的射影确定线段 OP。如果线段 a 是已知立方体的棱，那么 OP 就是所求的两倍立方体的棱。

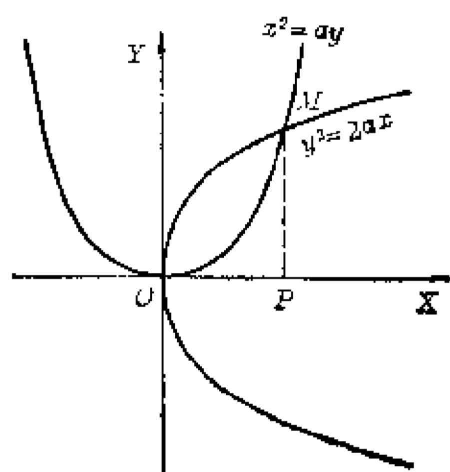


图 8

另一个雅典哲学学派吕园学派①，它的创始人和领导者是哲学家亚里士多德（公元前384～前322）。当他是柏拉图的学生的时候，在许多方面赞成德谟克利特的唯物主义的信仰，亚里士多德作出了自己的哲学，从他的哲学里可以看出，他在唯物主义与唯心主义之间经常摇摆。但是不管怎样，现实世界的客观存在，首先是他的整个哲学的出发点。

在吕园里，象上面这类的数学问题提到得很少，所以亚里士多德对数学的影响只是间接的。但是亚里士多德在数学和数学相关的科学方面，具有如此渊博的知识，以致他的著作在其他的知识领域里，对数学的发展具有明显的意义。只要谈到亚里士多德是演绎逻辑的创造者就够了。他根据演绎逻辑作出了许多数学证明。此外，亚里士多德建立起物理现象的理论，也帮助了数学的发展。

① 名称“吕园”或者“吕园人”的（拉丁方式）学派，是由吕园的阿波罗教堂而得此名，学派就设在教堂附近。

因为研究物理在一切时候都是为发展数学概念服务的。研究物理，如果没有数学概念是行不通的。

关于纯哲学上的无限性概念，对我们来说是很有兴趣的。亚里士多德给无穷大下了这样的解释："无限性在它的后面不是什么东西都没有，事实上，在它的后面始终存在某一东西"。这样理解无限性同现代数学的定义没有矛盾。

亚里士多德首先开始采用字母作为未知量的符号。但是没有成为简化计算的目的，也不能写成数字计算公式的形式；因为这样的方法在那时还没有进入数学，虽然有过这种打算，甚至中世纪的某些数学家，由于追随亚里士多德，在数学著作中曾经使用过类似的写法。

亚历山大学派

公元前四世纪中期，希腊共和国即雅典、斯巴达，以及其他由于布罗奔尼撒战争（公元前431～前404年）和抢夺贸易市场彼此长期竞争而削弱的国家，对周围国家来说，逐渐失去了军事和政治上的优势地位，同时不能为了共同抵抗威胁希腊的敌人而联合起来。这就使马其顿国王菲力浦二世能够彻底摧毁雅典的强大力量。在喀罗尼亚（公元前338年）会战中，菲力浦二世残酷地打败了希腊军队，于是马其顿的长期统治进入了希腊。

菲力浦二世的儿子马其顿王亚历山大（公元前356～前323）是亚里士多德的学生。他视野广阔，善于把军事放在国家重要的高度。在他的军队里，有当时最好的武器和装备。在军队里有工程学的专家、医生、经验丰富的统帅。所有这些情况与邻国军队相比，马其顿王亚历山大的军队树立了很大优势，并使他能够顺利地进行征服性的战争。亚历山大王用这样的方法，在很短时间内成功地建立起最大的帝国，从里海延伸到尼罗河沿岸，从马其顿延伸到印度。但是只用武力所建立的这个帝国，未能存在很久。亚历

山大王死后，就分裂成某些古希腊文化的希腊马其顿奴隶主统治的独立国家。

托勒玫王朝领导的希腊-埃及成为这类具有颇大作用的国家之一。亚历山大城是这个国家的文化、商业和工业的中心。这座城市是由马其顿王亚历山大在公元前332～前331年在地中海沿岸的尼罗河三角洲建立起来的。亚历山大城成为托勒玫王朝国家的首都。同时亚历山大城是科学思想最大的中心，在这里科学思想得以很快地发展，建立起无愧称誉世界的藏书七十万卷的图书馆，博物馆，实验室，天文台，动物园，植物园和许多其他的文化设施。亚历山大城在进一步发展数学知识的意义上，是雅典的继承者。

公元前三世纪亚历山大城在数学领域里作出了这样巨大的成就，以致它以“黄金时代”的名望载入数学史册。在这个时期，有大批的数学家和杰出的数学思想家在亚历山大工作。他们在独创性作品中的名声，直到现在仍然闪闪发光。

亚历山大时期数学家们的作品有两个主要倾向。其中一些数学家遵循毕达哥拉斯和柏拉图学派的唯心主义倾向，在自己的学术著作中脱离了生活，但是他们在论证、研究与早期获得真理的分类中，显示了自己的天才。这种深入研究使数学得以巩固下来，并使它产生前所未有的力量。另一些数学家善于密切联系实际，因此能够不仅在深度上，而且在广度上对数学作出巨大的进展。

为了主持亚历山大城的数学学派，托勒玫一世在世时，曾经请来了欧几里得。我们很少知道这位伟大数学家的生平。连他出生和死亡的年月也无从知道①。只知道他生活在约公元前300年。有的资料说，欧几里得曾在柏拉图学派中学习过一段时间。欧几里得最伟大的数学著作是《几何原本》。

在欧几里得《几何原本》里，对他以前的和他亲自增补的所有

① 欧几里得生于约公元前330年，死于公元前275年。——译者注

几何问题，作出了严格的逻辑性的叙述。这种叙述是借助于演绎法，包含把假定作为基础的某些不要求证明的定义和真理，而一切进一步的原理则用严格的证明作出，这些证明或者是根据这些真理，或者是根据由真理得出的原理。



欧几里得

欧几里得的《几何原本》是一部巨著，共有十三卷。

在第一卷的开始包括欧几里得的定义、公设和公理。从现在的观点看，公设与公理没有本质区别。但是欧几里得把公理看成是对一些确定事实所作的众所周知的、公认的已验证的判断，而把公设看成对它所叙述的性质能够为之实践的要求。①例如有一条公理的内容是："等量减等量，余量仍相等"。这正是对一件确定事实的论断。而下面是一个公设的例子："一条有限直线可以无限延长"。这里我们看到，它叙述了实际完成它所指出的要求（即无限延长直线）的可能性。

《几何原本》前四卷包含平面几何的问题。在这些问题中叙述了平面图形的性质、多边形和圆。第五卷的内容有比例的理论。据推测，这一卷书的主要材料是向攸多克萨斯借用的。第六卷专讲图形的相似问题。在第七、八、九卷里讲数论的基本问题。顺便说说，这卷书里所研究的问题涉及到最大公约数和最小公倍数的定义，以及连比、平方和立方的相互关系。第十卷里包含可公度和不可公度量的概念的说明。第十一卷叙述了立体几何主要的定理。第十二卷里建立了棱柱、棱锥、圆锥、圆柱和球的度量关系。第

① 拉丁字 postulatum 表示要求。

十三卷是研究正多面体。

在第二和第六卷里还包括可以叫做几何代数的内容。它是毕达哥拉斯学派曾经提到的那个思想的进一步发展，其中有二次方程的几何解法。例如，形如 $x^2+ax=b^2$ 的方程，可以用这样的方法来解，当然条件本身不是我们现在所写的那种形式，然而它具有这样的几何意义："含有未知边长 x 的正方形面积，加上一条边等于 a 而另一条边长等于正方形边长的矩形面积，等于边长为 b 的正方形面积。求第一个正方形的边长。"为了解题，作边长为 $\frac{a}{2}+x$ 的正方形，其中 x 取任意长（图 9）。在离正方形上面一条边为 x 处作直线平行这条边，在离正方形右面一条边为 x 处作一条直线平行这条边。从图上可以看出，$x^2+ax=\left(\frac{a}{2}+x\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=b^2$。所得到的关系式，几何上可以解释为，在直角三角形一条直角边与斜边上所作的两个正方形面积之差，等于在另一条直角边上所作的正方形面积。为了求线段 x，只要作出已知直角边为 $\frac{a}{2}$ 与 b 的直角三角形就可以了，这时它的斜边长为 $\frac{a}{2}+x$。由三角形的锐角顶点取半径等于 $\frac{a}{2}$，画弧与斜边相交，斜边上另一部分的线段等于 x，这就是所求的线段，如图所示。

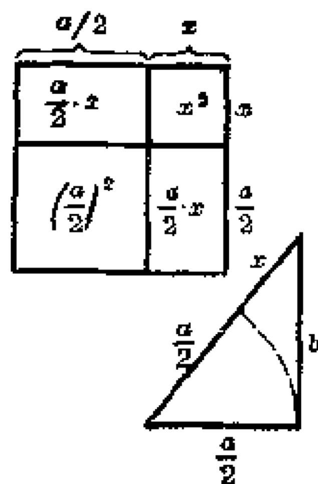


图 9

因为在欧几里得那个时候还不知道有负数，所以对于任意的二次方程不能给出一般的解法，因此对于形如 $x^2-ax=b^2$，$ax-x^2=b$ 的方程，不得不用类似的研究方法作出另外的图形。

欧几里得在《几何原本》里叙述的形式是：首先研究所给命题的一般形式，其次得出有关图形的评语，然后为了证明作必要的辅

助线，最后作出结论，用语言表示即“原来需要证明的就是这一点”（如果进行证明的话），或者说“原来需要作的就是这一点”（如果进行作图的话）。关于《几何原本》的内容还须指出，欧几里得写出自己的著作，并不希望为实际目的而运用，其目的仅仅是为了科学。因此我们在他的著作中，就连三角形面积等于它的底边乘以高的一半的定义也没有找到。

虽然欧几里得的《几何原本》是在两千多年前写成的，但是它的一般内容和叙述的特征，却与我们现在通常所用的几何学教科书非常接近。

《几何原本》是欧几里得的一部伟大著作，此外他还创作了许多有关数学、天文学、音乐、光学的著作，可是这些作品的大部分没有保存到现在。

“黄金时代”的另一个伟大数学家是阿基米德（约公元前287～前212）。在人类的历史上，很难找到一位数学家，在发展数学和它的邻近科学方面比卓越天才思想家和伟大的爱国者、数学家阿基米德更伟大。阿基米德的名字在他同时代的人们中成为贤明的象征，他会用简单的方法解最难的问题。古希腊著名的作家和历史学家普鲁塔克（公元前一世纪）是这样叙述阿基米德的天才本领的：“把这样困难的题目解决得如此简单和明白，在数学里没有听到过．假如有谁尝试一下自己解这些题目，他会什么也得不到。但是，如果他熟悉了阿基米德的解法，那么他就会立刻得出这样的印象．这个解法他自己也会找到。阿基米德用如此容易和简明的方法把我们引向目的。”

阿基米德出生于西西里岛上的叙拉古城。他的父亲菲季（公元前三世纪）是位数学家和天文学家，他给了儿子良好的数学科学方面的家庭教育。但是，看来阿基米德没有受到全面的教育，因为他的家庭不具备足够的物质条件，为儿子安排进入供特权阶级享受的学校。但是，为使这个青年从幼年起能够显示自己的天才能


阿 基 米 德

力，这个家庭的培养已是绰绰有余了。

那时在欧几里得的著作里几何学已经有了很好的介绍，因此，阿基米德除了几何学外，还专心于天文学和力学。例如在天文学领域里，他制作了独创的仪器——天象仪（行星仪）模型，这个模型在阿基米德死后，长期保存在罗马博物馆里。

阿基米德的一位亲戚亥厄洛也出身于并不富裕的家庭，他参加过反对罗马人的战争，这次战争是由希腊统帅皮洛士在意大利和西西里，为了保卫自己同部族的人们而进行的。在这次战争中亥厄洛表现出这样的勇敢精神和机智，以致当他返回叙拉古时，他享有了一切特权和最高权力，因此他成为叙拉古的国王。亥厄洛命运中的这种变化，在阿基米德的命运里也有所反映，这就为阿基米德前往亚历山大学派那里学习，建立了良好的物质条件。

阿基米德一生酷爱天文学。但是，他的天文学著作没有一篇保留到现在。然而从他的另外著作中我们可以查明，他不仅对天文学问题发生兴趣，为了进行天文观测，甚至还自己制作了仪器。除了行星仪模型，阿基米德还发明了测量太阳的视角直径的仪器，用它来测量能达到很高的精确度。

阿基米德在亚历山大研究数学和力学。同时他利用力学的基本概念解决了许多数学问题。

阿基米德回到叙拉古继续研究他最喜欢的那部分知识。他的天才发明，在他返回祖国以前好久的时候，就得到了实际运用。他

在亚历山大时期实现了去埃及的旅行，并给埃及人以重要的帮助，为他们建造了灌溉土地的改良的机器，以后又用它来抽取矿井里的水。阿基米德在叙拉古时，解决了最难的几何学和力学上的问题，并继续书写实用技术的著作。阿基米德在给亥厄洛的一封信中写道：用不大的力可以使任何重物运动。并且断言，如果地球外面有一个支点，那么就可以把地球移动。亥厄洛表示相信这个断言的正确性。阿基米德并用三桅杆的船作过试验，这种船要用很多的人才可以把它拉到岸上。他提出用人和重物把船载满，只使用人的手力和一组复杂滑车的方法，不用特别的拉力就能够使这艘船移动。亥厄洛亲眼看到了阿基米德所掌握的知识的威力。

亥厄洛委派他运用他的知识制造各种机械和仪器，用于国家的防御。阿基米德完成了这项任务。虽然亥厄洛统治时期叙拉古没有较多的重大战争，阿基米德的发明在亥厄洛死后较晚的时候，给他的祖国带来了巨大的利益。

关于阿基米德在叙拉古的生活情况有许多传说。这些传说介绍阿基米德是怎样的一个人，他的科学思考总是那样的深刻，以致周围的一切甚至连他自己也都被忘记了。普鲁塔克写道：阿基米德忘记了吃饭，完全忽视关心自己的身体。经常要强迫他去洗澡，擦上香油膏，然而就在这时，他用手指在自己擦上油膏的身体上画几何图形。作为阿基米德的特点之一，古罗马建筑师和工程师维脱鲁维（公元前二世纪）记述了阿基米德发现浮体规律的情节："亥厄洛为自己定制了一个金皇冠。当皇冠做好后，他产生了怀疑，在金皇冠里会不会掺有银子。他请来了阿基米德，要他找出确定纯金属的方法。阿基米德长久地和顽强地思考解决这个问题的方法。有一次他洗澡时，当身体浸入装满水的浴盆去的时候，水漫到盆外，而身体重量顿觉减轻。在这一瞬间，阿基米德似乎发现了物体浸在液体里，就产生失重的规律。失去的重量等于排去液体的重量。这次成功的发现使阿基米德大吃一惊，他跑出浴室光着身

子沿街奔跑，一边呼叫着‘我可找到啦！’阿基米德发现的定律帮助查明了金皇冠的金属成份”。

阿基米德一生的最后几年，使我们能够判定这个最伟大的学者，他是一个优秀的爱国主义者，为祖国献出了自己全部的力量和智慧。

在西西里岛上，叙拉古是最大的国家，它是罗马和迦太基两个大国纷争的起源。无论是罗马，无论是迦太基都希望侵占叙拉古，把它合并到自己的版图上。公元前212年罗马的间谍阴谋杀死了亥厄洛的继承者亥厄洛尼姆。这种情况，还有罗马战争，在列昂基和埃涅城进行的骇人听闻的暴行，引起了叙拉古人的愤怒，于是他们开始反对罗马人的敌对行动。当时罗马人在有经验的军事长官领导下率陆军和海军向叙拉古推进。叙拉古城从陆上和海上遭到围攻。城市只能用自力对抗残酷的敌人，那时装备很好的罗马军队经常将精神充沛的部队投入战斗。但是罗马人不能长期占领叙拉古。阿基米德站在叙拉古人中间，他善于用自己的大量发明反抗罗马的先进的军事技术。他帮助叙拉古英雄的居民，使罗马人不能在战斗中占领城市。受到阿基米德天才的创造所支持的人民保卫住叙拉古大约两年时间。古历史学家用鲜艳的色彩描写了这场顽强的抵抗。历史学家波利俄这样写道：“阿基米德在城里准备这样一种反抗。海上进犯者的防御措施，未使保卫者因没有预见的工作而为难，而是准备了防范各种意外侵犯的防御手段；他们做好在任何情况下击退敌人的一切准备。阿基米德建造了许多机器，能够把炮弹送到任何所希望的距离去。敌人离城市还很远，阿基米德便把自己巨大的远射程投射机器，发射大量的重炮弹和箭，击败了敌人的战船。敌人无论如何也不能躲避这些炮弹，他们处于束手无策和毫无作为的境地。当时阿基米德发觉炮弹落得太远，落在敌人战船行列的后面，于是他使用了适合需要距离的较小的投射机器。这使罗马军队如此胆战心惊，以致他们无力再向前

推进。"接着波利俄又写道，叙拉古人依靠阿基米德发明的另一种机械怎样消灭了罗马的战船。当时罗马的兵船驶到城墙附近时，从城墙后面伸出鸟嘴梁，把巨大的重物抛在兵船上，把船打得粉碎。另外的机械在兵船上空投下铁爪子，铁爪子抓住船头，把船提出水面，使船竖起来，然后把船落下使它翻过来或者沉入水中。阿基米德的这些活动，使罗马人不能从海上接近城市。但是陆地上的情况也不妙。阿毕·喀劳狄的士兵被从墙内的炮眼里放出的箭所消灭，他们在由上面掷下来的投向他们的石块和圆木底下丧命，有时他们被铁爪抓住从高处抛下而伤亡。最后罗马的士兵惊慌失措，城墙上空一出现某种木棍，他们就仓惶逃跑。但是由于在城墙上的罗马的拥护者的叛变，他们利用叙拉古人尊敬女神阿阶麦德的节日的狂欢和酗酒。这座城市失守了。叛变者为敌人打开了较远的一个城门。罗马人冲进城里掠夺屠杀。就在这个时候，阿基米德牺牲了。阿基米德死亡的传说是这样描写的：敌人冲进城来，阿基米德没有料到这一点。他正在聚精会神地深思几何图形。罗马士兵跑到他跟前，阿基米德对他说："走开，不要动我的图"。罗马士兵听了，觉得受到污辱，就拔剑刺死了阿基米德。一位最伟大的数学家就这样牺牲了。他活了75岁。在阿基米德的墓碑上，刻着球内切于圆柱的图形。竖立这样的墓碑是根据阿基米德本人的遗嘱，因为这块墓碑象征着他的特别珍视的发明。

阿基米德许多著作的手稿一直保存到现在①。其中多半是几何内容的著作，也还有力学和计算问题的著作。我们知道的阿基米德著作有：《论平板的平衡或者它的重心》、《论抛物线求积法》、《论球与圆柱》、《圆的度量》、《论螺线》、《论锥型体与球型体》、《砂粒计算》（论数砂）、《论方法》（阿基米德给厄拉托塞的书信中，关于几何学的某些定理）、《论浮体》、《引理》。

① 1962年莫斯科数学物理文献出版社，出版了《阿基米德文集》一书，该书收集了保存完整的阿基米德的所有著作。

阿基米德的著作《砂粒计算》(论数砂)，专门讲计算和计算的理论。在这部著作里，阿基米德提出一个确定能够装满整个宇宙的砂粒的数量问题，即设想宇宙是一个球，地球是这个球的中心，从地球扩展到恒星区域的边界，在这样的范围内求出填满砂粒的数量。解答这种脱离实际的问题，看来不能带来任何益处。但这使阿基米德在解决一系列顺便产生的局部问题中，能够显示出随机应变的能力。首先，《论数砂》对扩大表示大数的可能性具有很大的意义。在阿基米德以前，希腊人的计算扩大到不超过 10000，并将 10000 叫做无数之多。阿基米德把无数之多当作一种新的单位，把无数之多引入计算，并且为无数之多个无数多提出了又一个更高位的单位。如此继续，阿基米德借助于“第一级”单位，“第二级”单位等等，提出了表示任何数量的图式。在建立了十进位制以后，可将数的个数表示为无限，这样数的概念就迅速地扩大了。在同一部著作里，阿基米德写道：“如果给一个从 1 开始的等比级数，并把这级数内的任意两项相乘，所得的积仍在该等比级数内，大因子距离积的项数与小因子距离 1 的项数相同，小因子距离积的项数与大因子距离 1 的项数相同。”因为阿基米德的几何级数的形式意思是连比 $1, a, a^2, \cdots\cdots$，那么上面所说的可以表示成同底数幂的积的法则，即 $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$。阿基米德在这里指出，把幂的积与幂的指数的和联系起来。某些作者认为，这个规定是数的性质的典型，阿基米德逝世后很久，这个性质导致了对数的发明。

阿基米德在几何著作里运用两个基本方法。其中一个方法是在“阿基米德致厄拉托塞信中论几何学某些定理”的作品里叙述的。内中叙述借助于力学定理证明的方法。但是，显而易见，阿基米德自己认为这个方法的根据是不充分的，或者更准确地说，是不够严谨的。因此，阿基米德使用这个方法时，通常借助他的卓有成效的穷竭法来检验得出的结论。这两种方法(力学法和穷竭法)本身包含着思想的先决条件，它经过两千年才成为完整的积分学的方法。

阿基米德在他的著作《圆的度量》里介绍了穷竭法的最简单的应用。在数学史上，阿基米德在这部著作里首先提出了关于度量圆周长的问题，以及求圆的周长与直径之比 π 的近似值问题，并且确立了这方面的误差可以允许的限度。阿基米德从两个方面着手计算圆周长，即计算圆内接和外切正多边形的周长。从正三角形开始，然后把三角形的边数倍增，阿基米德把边数扩大到96边形。这时他发现直径等于1的圆内接正96边形的周长大于 $3\frac{10}{71}$，同一个圆的外切正96边形的周长小于 $3\frac{1}{7}$。由此得到 π 的值等于 $\frac{22}{7}$，这就是我们通常在近似计算里所运用的数值，它叫做"阿基米德数"。其次阿基米德断定，圆的面积等于底为圆的周长、高为圆的半径的三角形的面积。

阿基米德在著作《圆的度量》里，解决的是圆的周长与圆面积的问题，而在《论球与圆柱》里则解决空间的对应问题，即求球的表面积和体积的问题。他熟练地使用穷竭法，证明了球的面积等于球大圆面积的四倍，球的体积是一个圆锥体积的四倍，这个圆锥的底等于球的大圆，高等于球的半径。

在阿基米德的这部著作里还有一系列有趣而重要的结论。例如，证明了球冠的面积，等于以连结球冠顶点与它底面圆周上任一点的线段为半径的圆面积。此外，阿基米德指出，如果在等边圆柱中有一个内切球，那么圆柱的全面积和它的体积，分别为球表面积与体积的 $\frac{3}{2}$。后一个问题还需要作图，阿基米德希望把这个图形刻在他的墓碑上。

阿基米德把很接近于现代积分法的内容，记载在他的著作《论锥型体与球型体》里。阿基米德把抛物线或双曲线弓形绕它的轴旋转所得到的体，叫做锥型体，也就是我们所说的抛物面体和双曲面体。

顺便提一下，阿基米德所起的名称，比我们通常用的名称更为确切，因为“抛物面”意思就是“类似抛物线的”，而“锥型体”就是“类似圆锥的”。我们的术语是不正确的，因为不能说体和线类似。而阿基米德的术语指出的是类似圆锥的体。

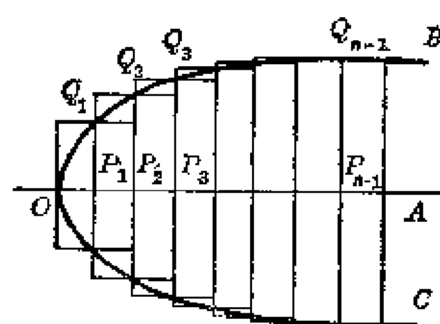


图 10

为了求抛物线弓形BOC绕轴OA旋转所得到的锥型体积，阿基米德采用了下面的方法（图10）。把抛物线弓形的高OA分成相等的部分OP_1，P_1P_2，P_2P_3，…，$P_{n-1}A$。总共得到n个等分点，由各个分点作垂线P_1Q_1，P_2Q_2，…，$P_{n-1}Q_{n-1}$，并在垂线上作抛物线的外接与内接矩形，当把整个图形绕OA轴旋转时，阿基米德得到了旋转抛物面的外切与内接圆柱组成的阶梯状几何体。外面的阶梯状体的体积大于抛物面体的体积，而里面的阶梯状体的体积小于抛物面体的体积。阿基米德根据这些体的体积，得到了抛物面体的体积。原来，这个体积等于高为OA、底面半径为AB的圆柱体积的一半。

在《论抛物线求积法》这部著作里运用了穷竭法。这部著作专门介绍了求抛物线弓形的面积。假定要求由抛物线的弦AB截得的抛物线弓形AMB的面积。在求这个以弦AB为底的弓形面积时，阿基米德的论述可概括如下（图11）。在抛物线上作平行于弦AB的切线，把切点C与弦的两个端点A、B相连。三角形ACB的面积大于弓形AMB面积的一半。同样地，对新的弓形AKC和CPB作三角形AKC和CPB。这时就得到了内接图形$AKCPB$。把这个过程继续下去。这时抛物线内接多边形的面积不断增加，使它接近于抛物线

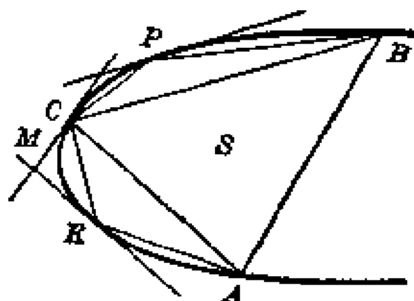


图 11

弓形的面积。阿基米德证明了三角形 ACB 的面积，等于三角形 AKC 与 CPB 面积的和的四倍。对于其后的三角形，也有同样的面积关系，因此，可以认为，所有内接三角形面积的和接近于抛物线弓形的面积。设三角形 ACB 的面积等于 S，我们得到抛物线弓形的面积为

$$S+\frac{1}{4}S+\frac{1}{16}S+\frac{1}{64}S+\cdots\cdots=\frac{4}{3}S。$$

阿基米德的著作《论螺线》在许多方面非常有趣。首先，阿基米德给出的螺线定义本身就很有趣。用他的话来说，就是："在平面上有一直线，把它的一个端点固定，使直线围绕这个定点作匀速运动，如果有一点同时从固定点开始沿直线作匀速运动，那么这个点最后描出一条螺线。"这样在螺线的定义里，阿基米德提出了运动。在阿基米德之前，连那些大几何学家如欧几里得等的著作里，也完全忽视了运动，因此阿基米德给出上述螺线的定义，消除了几何学在许多情况下阻碍它自己发展的偏见。他所研究的新曲线，我们现在叫做阿基米德螺线。阿基米德得到，由初始位置的直线和它旋转 360° 时所得到的第一圈螺线围成的面积，等于圆心为螺线的原点，螺线这一圈终点的向径为半径的圆面积的 1/3。他还发现了螺线的几个有趣的性质。在同一著作里，阿基米德还导出级数 $1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+n^2$ 和 $a+2a+3a+4a+\cdots+na$ 的几何求和法，其中 n 是任意自然数。

再来谈谈《引理》，我们认为这部著作是阿基米德的早期作品。这部著作中包括 15 个命题，下面介绍其中的几个命题。

1. 求割皮刀的面积。在阿基米德的时代，用这种刀刮割和清洗皮革。刀的形状是在一个大半圆里有两个彼此外切的小半圆，这两个小半圆与大半圆内切，并且两个小半圆直径的和等于大半圆的直径，如图 12 所示。由两个小半圆在直径上的切点作直径的垂线与大半圆相交，容易证明三个半圆之间的条形面积，等于以这

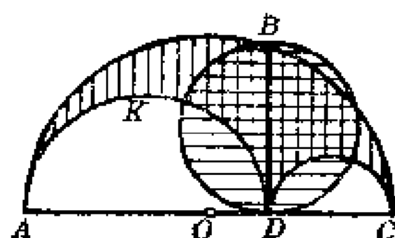


图 12

垂线的长为直径所作的圆的面积。图中条形 $ABCDKA$ 的面积等于直径为 BD 的圆面积。

2. 如果作正方形的外接圆与内切圆，那么外接圆的面积等于内切圆面积的两倍。

3. 如果在圆内作两条相交成直角的弦，那么由交点分成的四条线段的平方和等于直径的平方。

4. 如果从圆外一点向圆作两条割线，使一条通过圆心，另一条在圆外部分线段的长等于圆的半径，那么两条割线之间的夹角等于这两割线所夹大弧的1/3。这个题目的解法指出了把已知角三等分的可能性，即解决了关于角的三等分问题。但是实际上，利用圆规和直尺不能作出使它在圆外部分的线段等于圆半径的割线。

我们将阿基米德著作的简短概述的内容，写成使受过中等教育的任何读者都容易了解的形式。但是，这并不意味着在直接研究他的著作时，可以如此容易地了解阿基米德的思想。阿基米德作出的所有结论都是在还没有代数符号的时候，这就使证明的过程颇为复杂。阿基米德叙述的文体本身，对读者来说不能认为是方便的，因为具有天才洞察力的阿基米德，把他自己理解的见解写入了自己的著作里，而这些见解对即使具有广博知识的读者，也会给难住的。还有，阿基米德在正确引证他的前辈的证明时，从未准确地指出这个证明在哪里可以找到。

阿基米德的著作甚至连他同时代的人也难以理解。然而他的著作受到古代最优秀的数学家的珍视，阿基米德被公认为是那时最伟大的学者。

阿基米德时代的另一位有名望的学者，是他的与他同岁的朋友厄拉托塞（约公元前 276～前 194）。厄拉托塞出生于非洲北岸的昔勒尼城。大约在公元前 245 年，他在雅典受到非常好的全面教

育，曾被邀请到亚历山大作为未来的托勒玫四世菲洛帕托王位继承人的教育者。曾经委托他管理著名的亚历山大图书馆。

在厄拉托塞的著作里显示出他有多方面的学问。厄拉托塞也是地理学家和天文学家，他写的论文有《论善与恶》，《论财富与贫穷》，《论生活的艺术不是悲伤》，《论一切诗人力求使人快乐，而不是教育阅读者》。他还写成了文学史和语法方面的著作。厄拉托塞创作的作品有《地理学》，《论风》，《论太阳的测量》，《论地球的测量》，《论星球的分布》，《论黄道宫的分布》。

厄拉托塞在著作《论地球的测量》里顺便叙述了测量地球子午线的方法。这是人类历史上第一次进行这样的测量。为此，厄拉托塞在地球上选择了分布在一条子午线上的两个点（亚历山大里亚和赛尼两个城市），这两点间的距离为 750 公里①。已经判明，在夏至那天中午 12 点钟，在赛尼太阳光线照射在垂直于地面的物体上没有出现阴影，而在亚历山大里亚出现了阴影，阴影的长对应为 $7°36'$。这样就有可能求出地球向赛尼方向与亚历山大方向的两条半径之间所夹角的值。因为 $7°36'$ 近似等于圆周长的 $\frac{1}{50}$，因此距离 750 公里是子午线的 $\frac{1}{50}$。如果把地球当作一个球，那么根据厄拉托塞的计算，它的直径等于 12625 公里，这个数与准确的值只差 75 公里。

《筛法》，《论圆锥曲线》，《论测量》，《论平均值》都列为厄拉托塞的纯数学著作。

在著作《筛法》中提出了划出质数的方法。为此厄拉托塞是这样进行的：把自然数按增大顺序排列，他从第一个质数 2 开始，依次划去 2 下面的所有 2 的倍数，每隔一个数划去一个，即 4，6，8 等等。然后，再从 2 以后没有划去的第一个数 3 开始，依次划去 3 以

① 实际上是用斯塔第测量距离的。斯塔第是古希腊的长度名称，阿提喀的一个斯塔第等于177.6米。

下的所有3的倍数，每隔两个数划去一个，即6,9,12等等。再往下没有划去的数是5，厄拉托塞划去5以下所有5的倍数，即每隔四个数划去一个。有时要在先前划过的数上再划一次，这些数就是2和3的倍数。这个过程可以继续下去，直到只剩下质数，而其余的数都已划去为止。

在著作《论平均值》里，厄拉托塞给出比例的实际解法，希波克拉提斯试图在利用这个解法给出立方倍积问题的答案时，叙述了他称为“麦索略比”(мезолябий)的表，利用这个表可以根据已知立方体的棱，求出两倍立方体的棱。

厄拉托塞作科学工作一直继续到80岁。双目失明以后不得不停止工作，这种情况影响了他的精神状态，以致以自杀结束了生命。

古代著名的几何学家别迦城的阿波罗尼斯（约公元前200年），他是比阿基米德和厄拉托塞年轻的同时代人。阿波罗尼斯在少年时代就在亚历山大学校里学习，后来住在类似于亚历山大的以图书馆和学校而出名的别迦城里。阿波罗尼斯的主要著作有专门研究我们现在称为二次曲线的《圆锥曲线》。《圆锥曲线》共有八册。阿波罗尼斯把前辈所得到的圆锥曲线的知识，予以严格的系统化，同时作出了自己许多新的研究。门内马斯在相当的时候，为了得到各种形式的圆锥曲线，需要取三种不同的圆锥。阿波罗尼斯在同一个圆锥里，通过作平行与垂直圆锥的母线与轴的平面的方法，把得到的三种形式的曲线联系起来。阿波罗尼斯还给这些圆锥曲线取了名称：抛物线、椭圆、双曲线。他研究圆锥曲线的性质时，发现许多依赖关系，这些都是现在解析几何研究的对象。

阿波罗尼斯这部著作的希腊文本，只有前面四册完全保存到现在。其次的三册我们得到的是译成拉丁文的版本，最后一册已经失传。

除上面所介绍的著作外，阿波罗尼斯还写了一系列的数学著

作，可惜这些著作没能保存到现在。然而其中某些部分著作在比较晚的时候，数学家把它们复原了。其中的一册，也就是叫做《论相切》的著作里，有一个阿波罗尼斯的有名的题目，即作一个圆与三个已知圆相切。现在我们有充分简单的方法解这个题，但是在阿波罗尼斯时代这是非常困难的，就是阿波罗尼斯本人的解法也如此冗长，在我们已整理出版的书里占了约 25 页。

阿基米德和阿波罗尼斯著作的问世，是希腊数学发展的繁盛时期。以后，古希腊文化科学的影响在亚历山大和另外的城市得到传播，还出现了许多大数学家，但是他们所提供的作品毕竟不能与“黄金时代”伟大的几何学家的作品并列。

* * *

我们所研究的亚历山大学派存在时期，在数学史上叫做“亚历山大学派前期”。从公元开始，以亚历山大数学著作为基础，唯心主义哲学蓬勃地开始发展了，柏拉图和毕达哥拉斯的思想得到重新恢复。这种新柏拉图和新毕达哥拉斯的哲学迅速地降低数学思想新代表作品的科学意义。但是数学思想毕竟不能停滞不前，有时在某些数学家的著作里表现出来。亚历山大学派的著作并不行时的第二个时期，叫做“亚历山大学派后期”。

在亚历山大学派后期开始时，海伦应当是亚历山大学派的代表，他生活在约公元前一世纪。海伦是希腊杰出的工程师和学者，他以许多发明和大地测量的著作，以及主要是关于几何测量问题的数学著作而闻名。在他的具有数学意义的著作中，值得提出的有《测量学》和《窥孔照准器》。在《测量学》一书中，作出了精确地和近似地计算各种图形、物体的面积和体积的法则与提示，其中有根据三角形的三条边求三角形面积的公式，这个公式数学上叫做海伦公式。此外，在这本书中还给出了解二次方程和近似计算平方根、立方根的方法。从海伦以前的希腊其他几何学家一系列著作中挑选出来的这部《测量学》的特点是：在这部书中，通常给出

没有经过证明的法则，而只用个别例子予以解释清楚。这就显著降低了作品的价值，说明了它的作者科学知识不够充分。但是在数学的实际应用上，海伦胜过了许多自己的前辈。最好的例证就是他的著作《觇孔照准器》。这部著作叙述大地测量的各种作业方法，并且利用海伦所发明的觇孔照准器测量土地。这种仪器类似于现在的经纬仪，它的主要部件是两端有瞄准器的尺子。这把尺子可以绕圆旋转，而且能够既摆成水平位置，又能摆成垂直位置，这就既能够画水平方向，又能够画垂直方向的平面。为使仪器比较精确，还装置了铅垂线和水准仪。采用这种仪器，实际上使用直角坐标系时，海伦能够解决地形上的各种问题：测量观察者不可到达的一个点或两个点之间的距离；作不可到达直线的垂线；求两个地点之间的水平差；无需进入测量场地，测量最简单图形的面积。

海伦的著作给了他同时代的人以丰富的资料，实际利用这些资料完全可以满足建筑和农业的需要，因此这些著作在数百年间获得很大成就。

必须指出，在公元前一世纪末出现了新毕达哥拉斯派的尼可马赫的著作。他的著作《算术导论》是第一本与几何无关的算术著作，因此这部著作对算术研究产生的影响至少有一千年。同时，这部著作并没有什么独创的内容。它的思想的基础是把数分类，并且它的原理是依赖于数的神秘主义。在尼可马赫的数的分类里，同样归入了根据毕达哥拉斯形式所组成的多边形数。在尼可马赫的《算术》里，求数列的和的一章最为有趣。在这章里我们可以见到奇数数列的和为立方数的例子。例如，$1^3=1, 2^3=3+5, 3^3=7+9+11, 4^3=13+15+17+19$ 等等。

与尼可马赫同时代的人有天文学家和几何学家梅内劳斯·亚历山大，他写了球面三角的论文，在那时作为球面几何的基础。梅内劳斯的这部著作有一个著名的定理，用现在的语言可以叙述成：“如果一条直线与三角形的三条边或者它的延长线相交，那么三条

没有公共端点的线段的积，等于另外三条线段的积。"①

托勒玫的工作是属于二世纪的。他的著作主要是天文学方面的，他作天文观测，时间上是在125年与151年之间。② 他在自己的著作中无意地碰上了三角性质的概念，所以他在三角学的发展中也成功地作出了重大的贡献。托勒玫在自己的天文学著作中不象埃及人那样，已经不划分白天和黑夜的小时数，他认为，白天与黑夜的时间是相当的。他把圆周分成360度，每度再等分。他把圆的直径分成120度，这样一来，他就把圆的周长看成是直径的3倍。同时把直径的每一度分成60等分，而把其中每一等分再分成60份。很迟以后，罗马人才把度的这些部分取名为"partes minutae primae"和"partes minutae secundae"，原来的意思是"第一小部分"，"第二小部分"。从这些拉丁语中产生出我们度量角和时间的单位名称，即分和秒。

托勒玫的主要著作名为《天文学的伟大数学结构(十三卷)》或者简称《大综合论》(来源于希腊语"最伟大的")。这部著作历史上叫做《天文学大成》(或称《至大论》)，这是后来阿拉伯人给这部著作取的名字。

托勒玫在《至大论》里计算出从0°到180°整个弧所对弦的值，并且每隔1/2°弧给出了弦的值。为了完成这一工作，托勒玫引入了自己的定理，在数学史上叫做托勒玫定理。这个定理叙述为"圆内接四边形对角线长的积，等于它的两组对边乘积的和"。托勒玫从这个定理中得到推论，根据已知圆的直径和所对弧为α、β的两条弦，可以计算$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$弧所对的弦。利用所得到的关系式同样能够计算出圆内接正多边形(正三角形、正方形、正五边形、正

---

① 设这条直线与三角形ABC三边所在直线相交，与BC交于X，与CA交于Y，与AB交于Z，那么梅内劳斯定理断言$BX\cdot CY\cdot AZ=XC\cdot YA\cdot ZB$。——译者注

② 托勒玫的天文学深入研究了以地球为中心的宇宙体系，根据这种观点地球是固定在宇宙中心，而整个天体绕着地球运行。这个体系被哥白尼的以太阳为中心的宇宙体系所推翻，他认为太阳是宇宙的中心，地球与其他的行星绕太阳旋转，并且所有的行星都绕自己的轴旋转(В.Д.奇斯佳科夫注)。

六边形、正十边形)的边长。托勒玫还列出了弦长的表，就是现在的正弦表。

在数学史上，托勒玫也以下列事件而闻名。他第一个怀疑欧几里得平行线公设的明显性，试图推证出它的正确性来，这为后来许多几何学家类似的尝试开了一个头。一直到罗巴切夫斯基，才指出这条公设的正确性不可能推证出来，那些试证者都是徒劳的。

应该认为巴普士(公元三世纪)是亚历山大学派最后的一位大几何学家。人们认为，他写了大量的作品，其中只有《数学汇编》保存了下来，但也不齐全(数学汇编共有八卷，第一卷已失传，第二卷残缺不全)。

巴普士的《数学汇编》对数学历史具有重大意义：在这部著作中，巴普士对前辈学者的著作作了简要介绍，发展了前辈的某些思想。多亏他这样作，为我们保存了很多古代数学作品的资料，这些资料的原著没有保存到现在。此外，在巴普士的著作中有着某些新的独创的发现。因为巴普士把得到的定理通常不用作者的名字命名，所以我们很难断定，哪些定理属于他自己的，哪些定理是属于另外作者的，但是其中有些定理，人们认为没有疑问是属于巴普士的。其中许多定理具有理论和实际意义。巴普士的共线点定理是这样的："在一个平面的两条直线上各取三个点，在第一条直线上取点 1,5,3，在第二条直线上取点 2,4,6，那么每对直线 1—2 和 4—5，2—3 和 5—6，3—4 和 6—1 的交点在一直线 MN 上"(图13)。下述定理后来为古尔丁 (1577～1643)重新发现，所以最后以古尔丁的名字命名，它被广泛应用："一平面图形绕同一平面上的任何直线旋转一周所形成的体积，等于图形的面积乘以其重心所画的圆周长。"巴普士提出的和研究的螺线饶有趣味。巴普士的叙述是这样的：当一个

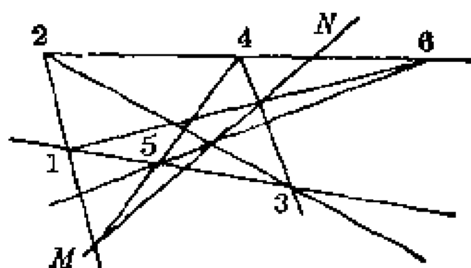


图 13

点沿 1/4 圆弧移动，同时这段弧又绕圆的直径旋转时，动点就描绘出这种螺线。巴普士证明的其他定理中，还有这样的定理："如果一个三角形的三个顶点分别在另一个三角形的三条边上，并把这些边分成相同的比，那么这两个三角形的重心重合"；"若两圆外切，则连结这两圆平行直径相对端点的直线通过切点"。巴普士还记述了下述问题的解法，过一直线上三点作三条直线，使它们围成已知圆的内接三角形。

大约生活在三世纪的代数学家丢番图也是亚历山大的学者。他活了 84 岁，关于他的最后消息刊登在《希腊诗文集》里的麦特罗多尔所写的墓志铭上。墓志铭的内容是这样的："丢番图的一生，童年生活占 1/6，青少年时代占 1/12，然后独身生活占 1/7。结婚后过了 5 年生了一个儿子，儿子比父亲早四年而亡，只活了父亲年龄的一半。"

丢番图写了《算术》一书。这部著作与我们所知道的古希腊其他数学著作有明显的不同。主要的区别在于，算术的叙述完全用纯分析的方法进行，虽然在有些场合还用了几何术语。丢番图的《算术》主要包括代数和数论的问题。必须指出，丢番图解各种题目时并没有说明普遍的方法，可是解每一个独立的问题时，他找到了自己特殊的方法。这就显示出丢番图巨大的数学才能，然而也相当大地降低了他的著作的科学价值。《算术》共 13 册，只有 6 册保留到现在。在这些著作中，丢番图研究了一次方程和二次方程的解法，并主要注意到不定方程。

丢番图的代数学应该列入叫做"过渡代数"的时期，即那时在代数里，从纯粹地修辞的叙述(即口头的)转为借助于简单的词和某些符号，采用更加简单的写法。例如，为了表示未知数，丢番图引用符号ρ'。如果要表示相同的几个未知数相乘时，那么就重复使用这个符号。对每一个未知数的幂，引进对应相仿的符号。表示减法用符号 $\pitchfork$，表示等式用字母 I。他把被减数写在减数的

前面，而把数字系数写在未知数的后面。一个记号直接跟在另一个记号后面，表示加法运算。

丢番图不知道负数，当需要把两个数的差乘以另两个数的差时，他运用的法则是："消耗数乘以消耗数得到增添数，消耗数乘以增添数得到消耗数。" И. Г. 巴什马科娃教授在评论丢番图的《算术》和在《丢番图》一书里说出了初步看法：丢番图的"消耗数"就是负数，它的符号 (лейпсис) 相当于我们的负号。

丢番图解方程时，只承认正有理数的答案，同时对于二次方程，如果有两个有理正根，他总是只算出一个根。因为保存到现在的书里没有给出解方程的说明，所以不知道他用怎样的方法解二次方程的。丢番图把解一次方程所使用的方法叙述成，"如果现在在一个题目里，方程两边遇到的未知数的幂相同，但是系数不同，那么我们应该由等量减去等量，直到得出含未知数的一项等于某个数为止。如果在方程的一边或两边有减项，那么应当向两边加上这个项，使两边只有加项。然后需要再一次等量减等量，直到得出未知数等于某个数为止。" 丢番图用这样的方法，获得了我们力求做到的，把已知数的项移到等式的一边，而把未知数的项移到等式的另一边，并合并同类项，两边除以未知数的系数。这里应当指出，丢番图也象整个古代数学一样，避免除法运算，而用重复的减法代替除法。

我们把丢番图的《算术》里他已经解过的题目，举几例如下：

1．把数 100 分成两个数，再把数 100 分成两个数，得到四个数。使第一次分后大的部分是第二次分后小的部分的 2 倍，第二次分后大的部分是第一次分后小的部分的 3 倍。怎样分法？

2．两个数的比等于 3，而这两个数的平方和与它们的和之比等于 5，求这两个数。

3．有三个数，把其中任意一对数的积加上这对数的和分别等

于 8,15,24，求这三个数。

4. 有人买了两种葡萄酒。一个度量单位的第一种酒是 5 德拉马(希腊币名)，一个度量单位的第二种酒是 8 德拉马。他所付的全部酒钱数是某数的平方。这个平方数加上 60 时同样是某数的平方。而最后的这个和数的平方根等于所买两种酒的度量单位数。求每一种酒所付的钱是多少？

5. 有两个数，它们的积与其中每一个数相加都等于某数的立方，求这两个数。

巴普士和丢番图是把新思想引入数学的亚历山大数学家的最后代表。此后亚历山大学者的作用每况愈下。这既有内部条件的原因，也存在亚历山大学派作品外部条件的原因。国家制度，在它的条件下，雅典和亚历山大学派得以发展起来，但以奴隶劳动为基础的这个制度，并不能够促进科学知识进一步发展。亚历山大学派存在的最初年代，托勒玫王朝曾为科学作品创立了非常有利的条件，因为这对统治阶级是有利的：需要建立一个为托勒玫带来个人利益的强大而富裕的国家。军事技术、天文学、地理学、商业和工业的发展，需要迅速地发展数学，所以数学也要具有为了本身向广度和深度发展的一切条件。但是，统治阶级物质上的需要，由于科学上获得成功而感到满意，因此也就不再存在鼓励科学知识进一步发展的促进因素。引起亚历山大的数学科学衰落的内部条件就是如此。除此以外，也存在着外部性质的条件，在公元开始以前很久，罗马便开始提出领土要求，其中就有亚历山大。在公元前 47 年，朱里·恺撒反对亚历山大战争的时候，极好的亚历山大图书馆在战火中遭到很大的损失。后来图书馆修复了，但是当罗马彻底统治亚历山大时，基督教徒与多神教徒之间开始了残忍的仇视。宗教的争吵也影响了科学，因为首先基督教的神秘主义开始渗透到科学里(例如，在尼可马赫的著作里就有反映)。其次，基督教的狂热病者开始迫害多神教的人们，其中包括“多神教”的科学。按

照总主教捷奥非尔的命令，公元 391 年，在亚历山大毁坏了圣塞拉皮斯教堂，与教堂同时被毁灭的还有亚历山大图书馆。亚历山大学派的日子就此完结。

西翁（四世纪）和他的女儿海帕西娅（370～415），曾是造就一大批亚历山大学派数学家的科学家。

西翁写出了注释欧几里得和托勒玫著作的巨著。至于海帕西娅，根据历史学家的观点，她在数学和哲学方面具有广博的知识，注释过阿基米德、丢番图和阿波罗尼斯的著作。她是数学历史上第一个杰出的女数学家。她也写了一些注释柏拉图、亚里士多德和其他希腊哲学家的观点的哲学著作。海帕西娅的著作没有一部能够保存到现在。她所掌握的高深渊博的学问和能说善辩，以及她积极参加城市的社会活动，这些在亚历山大为她建立了声誉，但同时引起了基督教徒狂热分子对"多神教徒"科学的仇恨。415 年在主教基利尔的唆使下，她被一群基督教的暴徒割成碎块而惨死。海帕西娅的追随者和学生们得以摆脱迫害，逃跑到了雅典。

亚历山大学派就这样结束了。

在五～六世纪，在雅典可以看出数学科学最后的短时间的昌盛。在这个时期内，雅典学派主要从事注释过去几个世纪的数学家的著作：有欧几里得、阿基米德和其他人的著作。但是，这个学派在 529 年，根据皇帝查士丁尼的命令，作为"多神教的卑污性"而被封闭了。

从以上所述的古希腊数学知识发展的历史中可以看到，在 1500 多年的时期内，希腊的数学科学有着巨大的成就。这主要是与泰勒斯、毕达哥拉斯、柏拉图著作中的初等几何有关系，特别是攸多克萨斯、欧几里得和阿基米德所获得的那些内容，直到现在还是保存着。希腊数学家作出了为数学完全奠定科学基础和严格的有系统的理论阐述。

希腊人还为我们奠定了整个几何术语的基础。至于数学的其

他分支(算术、代数、三角)，在古希腊数学知识中已经打下了某些科学基础，但是这些分支在古希腊人手里并没有获得发展。我们在前面曾经提到，希腊人在自己的算术研究中，已经脱离了实际计算，这在很大程度上妨碍了算术的发展。因为任何的科学脱离实际就不可能发展，代数的发展受到阻碍，是由于还没有充分使用符号表示。我们在丢番图的著作里，首先遇到使用个别的符号和简写，所以有所启示。代数直到很晚的时期，当由于发展各种符号能够帮助实际计算和科学的概括时，才获得了它的功用。希腊的三角学没有获得独立的意义，而仅是作为天文观测辅助性的计算工具。

然而，如果从整体上考察古希腊初等数学的发展，那么我们应该承认，希腊人在这条道路上取得了很大的成就。

古罗马的数学和欧洲数学知识的衰落时期

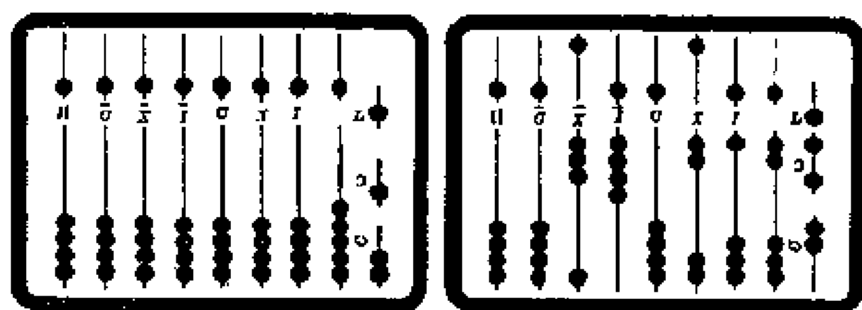
将希腊的数学思想发展进程与最近的邻国罗马的数学发展情况加以比较，我们可以看到，在我们所研究的整个时期内，假如对数学的巨大贡献予以评价的话，罗马几乎什么也没有创立起来。罗马人运用数学只是为了实用的目的，同时还带有约略的近似计算的特点。

罗马人沿用了古代伊特拉斯坎人[①]记数的方法。这种记数法甚至不可能进行最简单的运算。在这种记数法里，保持了五进制的痕迹，并且是利用字母表示数的，例如数1，5，10，50，100，500，1000分别表示成I，V，X，L，C，D，M。对于更大的数(10000，100000，1000000)还有特殊的符号表示，零则没有符号。罗马人没有使用数字的位值制。在记数法里，他们遵循加法和减法的原

① 伊特拉斯坎是罗马名称，古代意大利的部族之一。

则：较小的数写在右边时表示加上这个数，而写在左边则表示减去它。加数与被加数，减数与被减数写成一行。例如，IX，XII，XC，CXXX 分别表示数 9，12，90，130。当需要写任何一个严格规定的数时，现在我们有时也运用罗马数字的写法，它不会发生任何的算术运算。例如我们通常用罗马数字记载纪念碑或者建筑物落成的年月日，发生某个历史事件的世纪，书的篇章，学校班级顺序的号码，或者日历的月份，钟表字盘上的数字，等等。

用罗马写数法，由于计算困难，罗马人就借助于手指或算盘计算。他们使用的是希腊流行式样的算盘，有时也使用改良后的算盘。关于算盘的改良，我们可以根据从古代保藏在那不勒斯博物馆里的原物来判断。



算 盘

这种算盘乃是有槽的金属板，沿着槽可以移动筹码。希腊的算盘是用石子代替筹码的，纵向的槽有 9 条，并且从其中的 7 条槽中可以读出个、十、百、千、万、十万、百万。这 7 条槽从右向左顺次表示个位、十位、百位…… 如图所示。最右边的两个槽能够读出分数，对于整数，每个槽分成上下两部分，上面部分放一个筹码，下面部分放四个筹码。上面的一个筹码代替下面的五个筹码。右边第二个槽也是分上下两个部分，上部包含一个筹码，下部有五个筹码，能够读出 12 分之几。右边第一个槽分成三部分，上面部分能读出 24 分之几，中间部分能读出 48 分之几，下面部分能读出 72 分之几，右面的图中所表示的数等于 $84071+\frac{2}{12}+\frac{1}{48}+\frac{2}{72}$。

公元六世纪初，罗马哲学家波阿齐(约 480～524) 使算盘的计算更趋完善。他采用了带有数值记号的筹码。这就改进了算盘计算的技能，同时帮助了以后书写数字的发展。

我们从算盘的结构中已经看到，罗马人在计算时使用的是 12 进位制分数。这是由于在实际计算中，经常遇到的分数是 1 除以 2, 3, 4, 6 所得的结果。因此这些分数容易运用 12 进位制分数予以表示。同时分数$\frac{2}{12}$，$\frac{3}{12}$，$\frac{4}{12}$，……，$\frac{11}{12}$都有特殊的名称，在计算时利用这些名称就化为名数计算了，因此大大简化了一切种类的计算。罗马人统一使用分数与名数，是因为罗马人的分数名称有自己的来历。罗马人把货币基本单位"阿斯"(acc) 分成 12 等分，每一等分称为"盎司"。这个名称应用到分数上等于$\frac{1}{12}$，另外谈到的分数，部分的可以从与盎司的比值中得到自己的名称。例如$\frac{5}{12}$叫做"五盎司"，$\frac{7}{12}$叫做"七盎司"，等等。

至于几何概念的发展，在这方面罗马人落后于邻国的希腊人。希腊人对几何学已经获得严格的科学定型时，罗马人几何学的概念只局限于对建筑学家、土地测量人员不可缺少的实用知识。在几何学发展中，罗马人远远落后于古埃及人。无论是建筑人员还是土地测量人员，都只需要与最简单的几何方法打交道。例如罗马人把耕地都分成矩形与直线形的许多块；在建设城市时用城墙围成正方形的地段，并事先确定好正方形的大小；城市的街道按照平行方向分布。所有这一切大大减轻了必要的计算，并利用近似的公式，用类似于埃及人曾经使用过的那种计算。罗马的土地丈量人员，常常在确定地块面积时，仅仅测量土地的周长，错误地认为周长相等对应的面积也相等。用与现在的定角器相似的仪器作为主要的土地测量工具。这种仪器是相交成直角的两把直尺，并附有铅垂线，把它们固定在木桩上，把木桩垂直地插在地上，使两把尺

分布在水平位置上。这种仪器叫做格罗玛(groma)，所以把土地测量员常常叫做格罗玛基克。

必须指出，罗马的数学从未上升到很高的程度。我们知道，七世纪在欧几里得之后，罗马的数学还处于很低的发展水平，而在亚历山大学派衰落和529年结束了雅典的数学学派以后，整个欧洲都进入了数学知识没落时期。在这个时期内数学科学不仅没有发展，而且降低到了遥远世纪时期的数学知识的水平。这个时期在罗马，开始传播毒化奴隶的宗教——基督教，它用死后幸福生活的诺言安慰他们痛苦的命运。基督教作为教诲人们温温顺顺，不去反抗恶事的宗教，对统治阶级是有利的。罗马皇帝从四世纪起都采用了基督教，它逐渐成为进一步统治人民的宗教。

由于推行基督教，终于燃起残酷摧残多神教的文化和科学的火焰。要求放弃现实生活中一切福利的基督教，强烈地反对传播自然界和人类的知识。其中数学遭到了最大的排挤，因为数学常常与作为多神教的信仰本原的星相术和数的神秘论混在一起。因此，禁止数学甚至渗透到法律中，对此我们也不会引以为怪了。例如，在罗马四世纪皇帝狄奥多西的法典里，我们找到了这样的文字："任何人不要向占卜人和数学家请教"。而在查士丁尼皇帝(六世纪)的法典里有"关于凶犯、数学家和类似的人"的法律，这项法律说："彻底禁止应受到谴责的数学技艺"。

从传播基督教起，这个时代典型的修道院学派都集中在修道院里，修道院就成为中世纪科学最后的一个避难所了。就在那里还收集了古希腊罗马科学家最重要的手稿。但是修道士们对古希腊罗马科学家的数学手稿并不感兴趣。在修道院里只研究宗教教士必需的科学。起特别作用的是演说术、文法、辩证法。这些统称为"三学科"①，就是"三种法宝"，即帮助熟练和恳切地布道演

① 三学科系中世纪在修道院和正教学校中的高级教育讲座，包括三种科学：文法、修辞、辩论术。——译者注

说，为基督教教会的方针感化人们的科学。修道士们在自己的神秘主义和宗教抽象的推论中，得到极为荒谬的结论，并将所有这些谰言作为科学成果来叙述。他们常常利用古代学者的巨册著作，特别是数学家的著作，作为自己记载的书写稿纸。把古希腊罗马作者的科学著作的文字刮掉，并在被刮掉文字的原来的地方写上"神父的作品"。以致很多卓越的著作没有能够流传给后代。仅仅因为现代技术的成就，才能把好象刮去一层和铺上新记载的一层手稿，恢复到原来的状况，所以挽救了其中某些著作。但是最终由事实证明，教会甚至也需要数学，因为在这里初等的计算是必不可少的。在确定基督教复活节休假日时，同样需要计算。庆祝这个节日是在每年春分月圆之后第一个星期日。解决这个问题，对于教士来说具有很大的意义，当时好象也是研究天文学和数学开端的主要促进因素，因此对原来的"三学科"还要加上"四学科"①，也就是包含数学性质的科学：算术、几何、天文、乐理，这就是中世纪的四学科。

一直到十二世纪，我们没有发现欧洲数学的发展有多少明显的进展。从七世纪到十二世纪的整个时期内，对数学具有一定关系的，我们能够说得上名字的只有几个人。

盎格鲁撒克逊的学者修道士倍达（672或673～约735），在《时间计算法》中叙述了计算"复活节"的方法（就是计算庆祝复活节的日期），在另一部著作中述及那时的算术问题是借助于手指来计算的。但是，在他所有的著作中几乎没有述及分数，并且回避了整数的除法。

倍达死的那年，在爱尔兰诞生了另一位盎格鲁撒克逊的数学家阿尔昆（约735～804）。他曾编写了一本数学习题集，应该把它看作是第一本趣味数学书籍。在这本习题集里发现有一些是智力

① 中世纪的四学科由算术、几何、天文、乐理四门科学构成，是当时教育的四个高等学科。——译者注

题目，其中有些题目一直流传到现在，并且有些题目不只是计算的，而且是思考用的。从阿尔昆起，在习题集里就出现了用水管抽水注入水池和把水从池中抽出的题目。也就在这本书里，还有法律性质的题目。它的内容是："某人临死时，给怀孕的妻子留下了遗嘱，把他的财产用下面的方法来分配：如果生下儿子，那么把财产的三分之二分给儿子，三分之一给寡妇；如果生下女儿，那么三分之二分给寡妇，三分之一给女儿。遗嘱人死后，他的妻子生了双胞胎，一男一女，怎样分这份遗产？"习题集里还有追及问题，例如："狗追兔子，兔子在狗前面100英尺。兔子跑7英尺时，狗跑9英尺。狗应该跑完多少英尺才能追上兔子？"另外还有大家都知道的狼、山羊和白菜的题目。即"有一位农民随身带着一只狼，一只山羊和一棵白菜，他要渡过一条河。他只能用一只小船渡河，小船可以容纳他自己再携带或者一只狼，或者一只山羊，或者一棵白菜。因为人不在时狼要吃山羊，而山羊要吃白菜，所以在一边的岸上不能同时留下狼和山羊，或者羊和白菜。农民怎样把狼，羊，白菜渡到河对岸？"在阿尔昆的其他题目中，包含利用离首项与末项等远的任意两项之和相等的方法，求等差级数各项的和。

大多数题目只要求使用整数和算术运算的前四种运算。也有化为解最简单的一次方程的题目。

在习题集的几何部分中，使用了不精确的计算三角形和四边形面积的公式，这些公式是从前埃及人早就使用的。

公元十世纪法国人赫伯特（出生年份不详——死于1003年）在数学领域里的作用如下：他编写了一部几何著作，它的内容是最初等的知识。但是赫伯特工作的主要贡献，在于改进了算盘的计算方法，他使算盘在十世纪和十一世纪成为普遍通用的计算工具，以致在采用数学计算的方法中，也形成了拥护算盘计算的特殊的流派——算盘派。

十一世纪数学家写了不少算术和几何问题的著作，但是根据

科学原理，与前已问世的科学著作相比较，这些著作没有给出什么新的内容，因此它们不会引起我们的兴趣。

我们注意到西欧五到十二世纪数学知识极度衰落的同时，印度和近东一些国家的数学，却获得了巨大的发展。

中世纪印度数学的发展

根据文献资料和历史学家考证所提供的情况，可以断定希腊和印度之间有一定程度的交往，这促进了两国人民之间科学知识的交流。在个别情况下，还可以看到希腊科学对印度科学知识发展的影响，当然也有相反的影响。但是在数学知识共同发展的过程中，这种相互影响有这样的特征：它并没有抑制任何一个民族自己的创作才能，每个民族都按照自己的道路前进。下面我们可以看到，希腊人和印度人的这些道路在许多方面有所不同。如果在希腊人那里几何获得了重大的发展，那么印度人却相反，算术、代数和三角具有优势作用。印度人的几何知识，不排除取自希腊作者的可能性，特别是海伦和亚历山大学派某些学者的。从另外一方面来看，也存在着一种推测，丢番图借用印度人的设想作为自己代数著作的基础。但是无论如何，可以肯定地说，希腊人在数学著作里遵循着严格的逻辑叙述，并且很少注意在实践中应用演绎法的几何结论。印度人则相反，不去求得严格的证明，而主要是发展实用的计算。

特别是印度对算术作出了重要贡献。在这方面借助于引进十进位制的数字和确立数字的位值制，得以调整数的写法，都应归功于印度人的数学。此外，在印度为了指明缺位的单位，零的使用得到了推广，以致在改进数的写法和简化数的运算上，也发挥了很大作用。

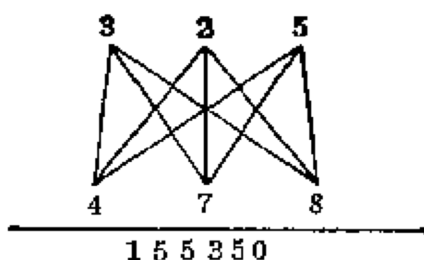
我们不知道印度在哪一个世纪和在怎样的情况下，数字符号

得到广泛的推广，但是可以肯定地说，阿利耶毗陀（生于476年，死亡年月不详）已经知道数字符号和零符号的应用，他是五～六世纪时的印度数学家和天文学家，著有《阿利耶毗陀历书》。阿利耶毗陀在这部著作的第一章里，使用了数字符号。虽然这些符号的外形跟现在的数字并不相同，但毕竟与现在的数字在某些情况下有较大的类似之处。例如，印度表示一、七、零的符号很象现在的数字。其余符号的起源离我们已有许多个世纪，在这过程中，这些符号变化很大。其实，就印度本身来说，在不同的地方，数字的形式也各不相同。有些资料指出，在印度出现数字符号比发明零和引进数字位值制原则要早。我们深信这一点是由于在锡兰通用与印度相同的数字，然而在同一个时间里，锡兰没有使用零，也没有应用数字的位值制原则。

采用了零、数字和位值制原则，简化了数的运算，因此在印度算术运算获得了巨大的发展。印度人采用的记数法的主要优点在于，这种记数法使用十进位制计算的位值制和采用零的符号，大大减少了数字的个数。在那时，希腊人、犹太人、叙利亚人等等的记数法，要用到27个不同的数字符号，印度人把这种符号个数减少到10个，包括零的符号在内。至于谈到位值制，远在巴比伦人已有萌芽，但巴比伦人把它使用在六十进位制上。而印度人把它使用在十进位制上。最后在位值制的情况下，又使用符号零，这比巴比伦人的记数法具有很大的优越性。例如，巴比伦人的小记号▼既可表示1，也能表示$\frac{1}{60}$，一般地可以表示任何60^n形式的数，可印度人的记数法，符号1只能表示1个单位，因为要表示十、百等，还需在1的后面写上相应个数的零。

印度人在撒一层红砂土的白板上写数和做算术运算。小木棒作为书写的工具。因此当在红色表面上书写时，就出现小棒所画的白色符号。印度的写法比现在的写法要复杂得多，然而印度人

差不多对每种运算都有完成它的若干方法。其中有些方法很机智实用，特别是某些乘法颇为有趣。由于这些方法阐明学校里的计算过程具有节省时间和教学上的意义，所以这些乘法能够一直使用到现在。我们举两种乘法作为例子。第一种，很久以来命名为“十字相乘法”，印度人自己叫做“闪电似的乘法”，因为印度人利用这种方法作乘法时速度非常快。这种乘法的根据是，两个数的单位相乘时，只要把两个单位相乘就可以得到积，10 就是10 乘以 1，100 就是 10 乘以 10 或 100 乘以 1，1000 就是 100乘以 10，或1000 乘以 1，等等。当作全部是 1，全部是 10，全部是 100等等的计算时，就可以不用求局部的积，而把它们合并起来立即写出最后的答数。如果用直线把要作运算的乘数连接起来，那么就得到一系列十字形，十字相乘法的名称正是由此而来的。例如，325 乘以 478 的写法是



印度人使用的另一种乘法，我们叫做“方格乘法”。这种方法是：画一个正方形的网格，被乘数有几个数字就画几列方格，乘数有几个数字就画几行方格。把被乘数写在网格的上面，乘数写在网格的左边，严格按照每个网格对应有一个数字，并且乘数由下向上写。然后作每个方格的对角线。每一个被乘数的数位乘以每一个乘数的数位，部分的积写在处于对应交叉上的格子里。如果得到的积是两位数，那么高位写在对角线的下面，低位写在对角线的上面。按照对角线的次序把每个数相加，并且根据对应的对角线，把答数写在方格的下面和右面，把这些数连起来就是答案。我们看下面 325×478 的例子。

	3	2	5	
8	4 2	6 1	0 4	0
7	1 2	4 1	5 3	5
4	2 1	8 0	0 2	3
	1	5	5	

印度存在过符号写法，它经历了形成写法的第一阶段，也就是过渡写法的阶段。在这个阶段里，还没有发现为我们所理解的这些词的代数符号体系。但是，我们还是可以看到，印度人使用简化符号时，离开了修辞代数向前走得很远。例如只写“пха”来代替表示相等的“пхалам”一词，表示加法的“йута”一词，只写出其开始的音节“йу”。减法借助于十字形符号，用“канита”一词的第一个字母表示，也就是表示被减数。用“бхага”一词开头的字母“бха”这个音节表示除法。二次幂用“варга”一词的“ва”这个音节来表示，它表示大批的相同事物。三次幂用表示“物体”的“гхана”一词的音节“гха”表示。借助“ва”和“гха”两种符号表示数的更高次幂：“ва ва”表示四次幂；“ва гха гхата”表示五次幂；“ва гха”表示六次幂；“ва ва гха гхата”表示七次幂；“ва ва ва”表示八次幂；“гха гха”表示九次幂，等等。

乘法没有特殊的符号，并把乘数写成一排。分数类似于我们现在的写法，分子放在分母的上面，但是没有分数线。如果是带分数，那么整数部分写在分数的分子上面，得到三层的写法。已知数叫做“рупака”，用音节“ру”来表示。未知数叫做“йаваттават”，用音节“йа”来表示。如果遇到有几个未知数，那么用各种颜色来区别，白的，绿的，黄的等等。还将表示相应颜色的名称开头的音节作为符号，加到未知数符号上。平方根用“карана”一词的“ка”来表示（不表示负数）。写出运算和它的结果时，把数写在矩形里

面进行算术运算。

我们举例来说明印度人用怎样的方法写出上面所介绍的符号。分数$\frac{2}{3}$写成这样的形式：$\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$，带分数$3\frac{1}{2}$写成：$\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}$。我们的写法 $5+7=12$，而印度人写成下面的形式：

5	7	пха 12
1	1 йу	

分数$\frac{3}{4}$乘以 24 的写法可以表示成下面的形式：

3	24	пха 18
4	1	

在列方程时，它的左边和右边部分写成上下两行。例如，在印度天文学家和数学家婆罗摩及多（约 598～660）的著作里，我们找到了方程的写法，它可以表达成这样：

йа　ва　0　йа　10　ру　$\dot{8}$；

йа　ва　1　йа　0　ру　1。

这种写法解释为下面的形式：

$$0x^2+10x-8=1x^2+0x+1。$$

在上述写法中，可以看到与我们的写法有区别的另外几个符号。这是因为晚一些时期的印度作者曾经作出了某些简化。例如，为了指出是减法，人们就在被减项的上面画一个小点，为了表示加法，人们把所加的各项排成一行；而用音节“бха”代替单词“бхавита”，就表示乘法。除法，人们开始将被除数放在除数的上面来表达。

印度人所作出的符号颇多地促进了印度代数基础的发展。同时印度人使用的代数实际运算，大大超过了希腊人的代数运算，其中包括超过丢番图的代数。印度代数较大的成就是引进了负数，当问题涉及到现款和债务，以及反向运动时，印度人使用了负数。印度人象运用正数一样运用负数，这就在数的理论里引进了新的因素。他们没有回避无理数，在实际计算中出现无理数时，那么象有理数一样加以运用，但没有深入思考无理数的性质和实质。因此，印度的代数概念和运算没有理论根据，但是广泛的传播和使用代数计算，造成了代数演算的方法得以推广。

印度学者解出了一次方程和二次方程。反求法是解算术题和一次方程所使用的方法之一。在阿利耶毗陀的著作里叙述过反求法，但是这种叙述非常简洁，外行人可能看不懂。阿利耶毗陀写道："乘法变为除法，除法变为乘法。利润转化成亏损，亏损转化成利润。这就是反求法。"我们发现婆什迦罗(生于 1114 年，死亡迟于1178年)用反求法解题的例子。这个题目就是："请你告诉我，你知道怎样正确地运用反求法吗？有一个数乘以 3，然后增加这个积的$\frac{3}{4}$，除以 7，减去商的$\frac{1}{3}$，自乘，减去 52，开方后加上 8，除以 10 得出数 2，原来的数是多少？"用反求法解这道题应该根据下面的顺序进行。

$$2\times10=20,20-8=12,12^2=144,144+52=196,$$

$$\sqrt{196}=14,14\times\frac{3}{2}=21,21\times7=147,147\times\frac{4}{7}=84,$$

$$84\div3=28。$$

印度人在解一元一次方程时采用了另外的方法，称为"假定法"。在这种情况下，设未知数为任意的值，按照所给条件进行全

部运算。如果计算结果得出正确答案，那么就是未知数等于这一给定的值；如果所得答案大于或小于正确的数，那么就是说，对未知数所给的值增加或减少多少倍，答案也增加或减少同样的倍数。例如解这样的题目："把 264 个货币单位分成 4 份，要使第二份比第一份大两倍，第三份比第二份大三倍，第四份比第三份大四倍。"可以用任意数作为第一份，例如用 2 个单位，那么第二份应该是 4 个单位，第三份是 12 个单位，第四份是 48 个单位。因此总和等于 66，根据题目的条件应该是 264。就是说所得答数比题目所给的数小 4 倍，所以未知数的值不等于 2，而是比 2 大 4 倍，即未知数等于 $2\times4=8$。

印度人解二次方程的方法比丢番图优越，他们认为这种方程存在两个根。例如，婆什迦罗在解方程 $x^2-45x=250$ 时，给出答案是 50，-5，但是他补充说，在这种情况下，第二个值不适合，不应该取，因为谁也不赞成负根。我们在婆什迦罗的著作里，发现对负数有这样的理解：负数的平方总是正数，负数的平方根是不存在的。并且婆什迦罗认为，正数的平方根有两个值。还在婆什迦罗以前好久的时候，在婆罗摩及多的著作里，我们发现怎样进行负数加法和减法的解释。他的解释归结如下："两种'财产'的和是'财产'，两种'负债'的和是'负债'；'财产'和'负债'的和等于它们的差。如果'财产'与'负债'相等，那么差是零。零与'负债'的和是'负债'，而零与'财产'的和是'财产'；两个零的和是零。从零减去'负债'则成为'财产'，而减去'财产'则成为'负债'。如果需由'负债'减去'财产'或者由'财产'减去'负债'，那么取它们的和。"为了区别正数与负数，在数的上面放置箭头，并使箭头成为相反的方向。

印度人对无理数作同有理数一样的运算，从而获得相当复杂的关系。例如，他们曾经知道的关系式，用我们现在的公式表示，就是：

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

$$\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}}。$$

为了求平方根和立方根，印度人使用了表示两个量之和的平方与立方的公式。

二次方程的题目常常与几何形状相联系，并要求运用毕达哥拉斯定理。通常把整个题目编成诗的形式(以便更好地记忆)。我们来看从婆什迦罗著作里摘出来的两个这样的题目。

关于杨树的题目：在河岸上生长着孤零零的一株杨树。突然一阵大风吹来把杨树干折断。可怜的杨树倒下了，倒下的树干与河流成直角。现在想起来，树根到河边只有 4 英尺。树顶落在河边上，折断的地方离树根 3 英尺。要求迅速地告诉我，杨树的高是多少?"

关于蜜蜂的题目：

有一朵卡达姆巴花，
在她的一个花瓣上，
落下了蜂群的五分之一。
就在这朵卡达姆巴花旁边，
盛开着一朵谢缅特加花，
在这朵花上落下了蜂群的三分之一。
你先求出它们的差，
再把差数乘以 3，
将所得蜜蜂数安放在古泰依花上。
只有一只蜜蜂在哪儿还没能给自己找到位置。
她时前时后，时左时右地飞着，
尽情享受着百花的馨香。
你先用心算一算，

过会儿再说出，

花丛里总共飞拢来多少只蜜蜂？

印度人十分注意不定方程。在这里，为了解形如 $ax+by=c$ 的方程，他们所用的方法实际上类似于欧拉的方法。在解题时，欧拉采取把数 $\frac{a}{b}$ 分解成连分数的形式，印度人同样把数归结成一连串的除法。印度人还解出一些比较复杂的不定方程。例如，我们发现他们会解形如 $xy=ax+by+c$，$y^2=ax^2+b$ 的方程。

婆罗摩及多的著作应当认为是印度人在几何方面最为出色的。但是在这里我们没有找到充分严格的法则。婆罗摩及多所解决的主要问题是这样的：根据所给的边和外接圆的半径，求三角形的面积；作三角形，使它的边、外接圆半径和面积都是有理数；根据圆内接四边形的边，计算它的对角线、面积、高，以及与这个四边形有关的某些另外的线段。婆罗摩及多在计算时，取圆周长与直径的比等于$\sqrt{10}$。

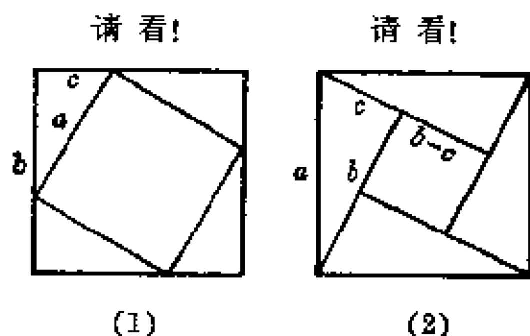
在很晚的时候，例如在十二世纪婆什迦罗的著作里，对于几何性质问题的解法是采用婆罗摩及多的方法。婆什迦罗宁愿用直观代替严格的证明，因此他的证明，以及其他利用直观表示代替严格证明的印度作者的证明，对我们来说，只具有那种价值，这就是可以在学校里用它们图示几何关系。现在在学校里作为教学参考资料来应用的所谓"印度圆"就是其中的一个例子。它适用于根据已知圆的周长求圆的面积。为此，把两个相等的圆分成个数相等的全等扇形。然后把圆沿着扇形边界上的半径剖开，但各个扇形的圆弧仍连在一起，再把两个剖开的圆展开，使它们的圆周尽量伸直，并把展开的两条齿形互相嵌入，成为图14所示的那样。这时所得图形近似于平行四边形（把圆分割成的扇形个数越多，这个图形与平行四边形的差别越小）。圆的周长成为得到的平行四边形的底边，圆的半径是高。因为这个平行四边形的面积等于圆的周长和



图 14

半径的积，所以一个圆的面积等于这个积的一半。如果圆的半径为 r，那么圆周长等于 $2\pi r$，于是平行四边形的面积等于 $2\pi r^2$，一个圆的面积是 πr^2。

毕达哥拉斯定理的印度证明也很有趣味。这些证明只有图形和加写的："请看！"（见图 15(1)、(2)）。



(1)　　(2)

图 15

我们在谈论印度学者阿利耶毗陀、婆罗摩及多、婆什迦罗的时候，还应该指出，数学不是他们的专业。他们主要致力于天文学，由于这个原因，他们利用三角关系作为辅助的计算工具。

这种情况对发展印度的三角学具有很大的意义。印度人在这方面远远超过了希腊人。我们发觉，在把圆周和直径分成几个部分的方法本身，与前面已作介绍的托勒致的方法相比较，印度人有相当大的进步。如果印度人也象托勒致那样，把圆周分成 360 个基本部分，那么他们能把直径分成 6876 份。方法如下：把圆周分成 $60\times360=21600$，而直径的 3.1416 倍是圆的周长，就是说，直径含有 $\dfrac{21600}{3.1416}$ 个刻度，这就近似地等于 6876。这样的分法应当认为是先进的。因为印度人在这种分法里明显地理解为，弧长与直线

线段之间有相等的可能性。并且印度人确定圆的周长与直径的比，要比巴比伦人和托勒玫精确得多。

此外，印度人在自己的计算里已经使用了三种三角量：第一种量相应于我们的正弦，第二种量相应于我们的余弦，第三种量是正矢(sinus versus)①，它是 $1-\cos\alpha$，现在已不再使用了。这样，印度人使用的已经不是全弦，而是半弦，也就是正弦线。连结弧 AB 两端的是全弦（图 16），印度人称为“吉瓦”(джива)，就是弓上的弦。AC 是弦 AB 的一半（就是我们的正弦线），称为“阿尔哈吉瓦”(архаджива)。“吉瓦”一词在阿拉伯语里音译成“吉巴”。后来这个词写成为“扎依布”，按照阿拉伯语这个词已经完全是另外的意义了，就是“пазуха”（怀）。这个词后来译成拉丁语为 sinus，因此这个不合适的术语进入了科学的日常生活。

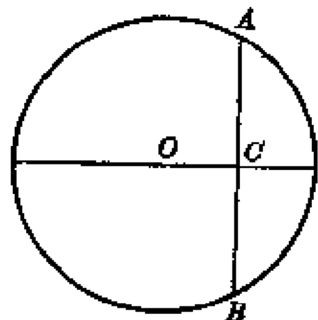


图 16

我们发现印度人有每隔 3°45′ 的角给出半弦的表。印度人为了计算半弦，把圆内接正多边形的边作为基础，它们的长容易用外接圆半径的长来表示，而半径长则取为 3438。因此 90° 的正弦也是等于 3438，而 30° 的正弦等于连接 60° 弧的两端的弦的一半，用 1719 表示，等等。

印度人已经知道三角量之间的某些关系式，这就能更准确地计算。例如，他们知道的关系式可以表示成公式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2$，$\cos(90°-\alpha)=\sin\alpha$，$\text{sinvers}2\alpha=2\sin^2\alpha$，还有两弧和的正弦与两弧差的正弦的表达式。他们由关系式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2$ 得到

$$\sin 45°=\sqrt{\frac{r^2}{2}}=2431, \sin 60°=\sin(90°-30°)=\frac{1}{2}\sqrt{3r^2}=2978。$$

从所求的 90°，60°，30° 的弧的正弦出发，利用半角的表达式，

① 以后用 sinversα 表示。

印度人计算了角 $22\frac{1}{2}°$,$15°$,$11\frac{1}{4}°$,$7\frac{1}{2}°$,$3\frac{3}{4}°$等的正弦值。

在婆什迦罗的著作《系统的晕》里提出了另外的列表方法。他运用两弧和的正弦与两弧差的正弦的表达式进行计算，由角 α 变为角 $\alpha+1$。

印度人的三角计算总是与直角三角形结合起来，因为他们遇到斜三角形时，总是把它分割成直角三角形来计算。

我们在上面概述了中世纪印度数学的发展，从中可以看到，印度人在代数和三角学方面获得了相当大的成就。但是关于几何学①就不能这样来评论。

七世纪到十五世纪中亚和近东民族数学的发展

对于要想知道欧洲数学知识发展的人们来说，有些中亚和近东国家数学知识发展的概念是重要的，因为欧洲数学家在自己的著作里，常常以中亚和近东国家的学者所得出的结论和成就作为出发点。欧洲人主要通过中亚和近东民族的人所作的翻译，熟悉古希腊人和印度人的著作。

*　　*　　*

亚美尼亚人民有着极为古老的数学文化。

还在七世纪，亚美尼亚著名学者、哲学家和爱国主义者安纳尼亚·席拉卡齐的各方面的学术著作，就举世闻名了。古希腊罗马关于四大元素，即土、气、火、水的唯物论学说是以安纳尼亚的哲学作为基础的。同时，安纳尼亚自发地得到了思维的辩证法。根据他的看法，“发生是消灭的开始，消灭也是发生的开始。由于这个永不消灭的矛盾，宇宙将获得永久存在。”因此安纳尼亚否定了作为

---

① 甚至在阿利耶波陀的属五世纪的一些著作里，我们所找到的几何知识，较之海伦的几何内容或者阿默士纸草书所作出的并没有多大的优越性。

自然力发展的主宰者上帝的存在性。

安纳尼亚的主要科学著作有天文学、数学、哲学、地理、宇宙学、气象学等。他为发展本国科学做了许多工作，而当他的祖国受到敌人入侵威胁时，这位爱国科学家毫不动摇地为了保卫祖国而参军服役。

安纳尼亚很明显地将数学放在科学知识的最高地位。关于数学他这样说："我非常喜爱数的技能，我认为，没有数，任何哲学论证都不能形成。尊敬它为一切智慧的母亲。"教科书和算术习题集是安纳尼亚最重要的数学著作。他的教科书，在引进理论以后提供了数的四种算术运算表。习题集里有很多有趣的题目，并且我们发现在某些情况下，运用了等差数列与等比数列，而所遇到的数值达 90000000000。安纳尼亚自由地运用分数，虽然分数的写法通常采用埃及的方法，就是分子是 1 的分数，而复杂的分数是用分子等于 1 的分数的和表示。

我们举出安纳尼亚习题集里的几个例子。

1. 一个商人走过三个城市。在第一个城市里向他征收的关税是他财产的一半又三分之一。在第二个城市里缴纳他剩下的一半又三分之一。在第三个城市里再一次缴纳他剩下的一半又三分之一。当他回家时，还留下 11"达黑更"(дахекан，货币单位)。请你思考一下，商人最初共有多少"达黑更"？

2. 埃及的法老庆祝自己的生日，其习惯是在生日的这一天，他要根据十个大官每人的优点，把 100 斗酒分给他们。请按照所有 10 个人的优点来分配。

注：第二个题目的条件所说的按照优点分配，相当于按1:2:3……的比例分配。

3. 雅典城里有个小水池，水池里安装三根管子。其中一根管子 1 小时可以灌满水池。另一根管子较细，要 2 小时才能灌满水池。第三根水管更细，灌满水池要 3 小时。请问，三根水管一起开

放，灌满水池需要多少时间？

从上面所举的例子可以看出，七世纪亚美尼亚的数学超过同一时代西欧的数学到什么程度。象我们在前面谈到过的那样，安纳尼亚同时代的倍达没有使用分数，甚至避开了整数除法的运算。我们在八世纪才看到欧洲人有水池和水管的题目（阿尔昆）。

从七世纪起，成为中亚和近东国家成员的各民族的历史上，阿拉伯国家开始发挥了重要作用。在七～八世纪期间，全部居住在阿拉伯半岛上的阿拉伯小国家，颇大地扩充了自己的国界，并征服了许多邻国，它们大部分处于较高的文化阶段。这样一来，就创建了阿拉伯的哈利发政权，建立了幅员广阔的国家。在它的组成中，除阿拉伯基本领土外，还包括巴勒斯坦、叙利亚、美索不达米亚、波斯、外高加索、中亚细亚、北印度、埃及、北非洲、比利牛斯半岛。哈利发国家的首都最初是大马士革，以后，八世纪在原来的巴比伦附近建造一座新的城市——巴格达，便将首都迁到那里。巴格达成为阿拉伯的文化中心。阿拉伯人接受了塔吉克人、花拉子模人、阿塞拜疆人、埃及人、波斯人和古代希腊与印度人民的文化，以此为基础，阿拉伯的文化获得了发展。

因为移入哈利发国的各民族中的许多人也用阿拉伯文字写作，所以有些历史学家不正确地把各民族的科学家的著作也算成阿拉伯人的著作。

我们称为九世纪伟大的乌兹别克的（花喇子模的）数学家和天文学家穆罕默德的别恩·穆萨·阿尔-花喇子模（八世纪下半叶～830 年和 840 年之间），是加入哈利发国民族的第一个大数学家。

阿尔-花喇子模出生于花喇子模城（黑瓦），以后在巴格达居住，是作为杰出的数学家被哈利发阿尔-马门邀请到那里去的。阿尔-花喇子模在巴格达完成的第一部作品，是他编制的三角值的表。他为了完成这部著作使用了托勒致的表和印度的表（所谓 синдханты），把这两种表加以验算和统一起来，建立了自己的表，

这种表要比希腊和印度的表精确得多。

阿尔-花喇子模的代数和算术著作对数学的发展是最有价值的。

阿尔-花喇子模的代数著作在数学历史上起了重大的作用，因为这部作品后来被翻译成拉丁语，曾长期作为欧洲主要的数学教科书。这部著作的某些特征，与丢番图和印度科学家的著作相似，但是阿尔-花喇子模未必能利用这些学者提供的资料。虽然阿尔-花喇子模解方程的方法与丢番图所用的方法相似，但是阿尔-花喇子模完全没有使用简化的写法，简化写法是丢番图代数的特征，他也没有使用丢番图的术语。最后历史研究证明，阿拉伯哈利发国的学者熟悉丢番图的著作，要比阿尔-花喇子模著作的出现晚得多。解方程的基本方法与印度人使用那种方法有明显的区别，这就表明阿尔-花喇子模没有模仿印度学者的方法。

阿尔-花喇子模创建的代数，甚至按照他自己的思想结构也不能被认为与希腊代数相似。如果大多数希腊人没有看到，科学知识的运用对于实际需要的必然性，那么在阿尔-花喇子模的著作里，我们恰恰发现相反的情况：它的最主要的愿望是使科学为人类服务，使它适合于实用的目的。在阿尔-花喇子模的代数里，专门有一章关于商业和商业交易三重法则的题目。利用方程可以解某些几何题目(例如，根据三角形的三条边求它的高的题目)。阿尔-花喇子模的著作不是单一的解题方法的汇集，而印度作者的著作主要是介绍解题方法。阿尔-花喇子模在著作里讲述理论，并指出这种理论的应用和用几何方法解释许多法则。这是他著作的最大优点。

阿尔-花喇子模的著作基本上是建立了解方程的方法。他以此为新的学科提供了方向，从这时起，方程的解法作为代数基本特征，被长期地保持了下来。新学科名称的本身——代数——应该来源于阿尔-花喇子模，因为这个名称是从“还原”(аль-джебр)

运算的名称中产生的。在我们现在所研究的著作中，阿尔-花喇子模也曾使用过代数。

除了还原运算外，我们在这里遇到了另外的运算，阿尔-花喇子模把它命名为“对消”(валь-мукабала)运算。我们发现在十六世纪的数学家阿尔-阿穆利著作里有这些术语的说明。阿尔-阿穆利说：“方程含有负值的那个部分，可以将它补上，而对另外的部分即增加等于补充第一部分的值，这种运算叫做“还原”。方程两边相似的与相等的项可以消去，这种运算叫做“对消”。

如果利用我们现在的符号来写，那么这两种运算可以用下面的例子说明。设给定方程

$$5x-12=4x-9。$$

上式两边分别加上 12 和 9，作还原运算，得

$$5x+9=4x+12。$$

上式两边分别减去 $4x$ 和 9，作对消运算，结果得

$$x=3。$$

因此，还原和对消运算分别代替现在方程的移项和合并同类项。

在阿尔-花喇子模的代数著作里，给出了一次方程和二次方程的解法。

阿尔-花喇子模对于二次方程没有作出一般的解法，而用数值例子研究了六种不同类型的二次方程，对每一种类型给出了特殊的解法。这六种类型用现在的写法，可以表示成下列的形式：

$$x^2=2x,\ x^2=36,\ 5x=10,\ x^2+7x=128,$$
$$x^2+21=10x,\ 12x+288=x^2。$$

当然，我们不会认为上面的第三个方程是二次的，但是阿尔-花拉子模却把它和其他二次方程一起考虑。

阿尔-花喇子模是用分析与几何方法解二次方程的，并且在用分析法解时，他承认有两个答案，他的解法较之丢番图的解法有很大的优越性。

对于方程 $x^2+10x=39$，阿尔-花喇子模给出了两种几何的解法，我们介绍其中的一种解法。

作边长为未知数 x 的正方形，然后在它的边上向外作边为 x 与 $\frac{5}{2}$ 的矩形。再把整个图形补充成边为 $x+5$ 的正方形(图 17)。从图中可以看到，整个大正方形的面积是由边为 x 的正方形的面积、边为 x 和 $\frac{5}{2}$ 的四个矩形的面积、边为 $\frac{5}{2}$ 的四个正方形面积组成的。因此大正方形的面积等于 $x^2+10x+25$。因为 $x^2+10x=39$，所以大正方形的面积等于 $39+25$，即 64。因而这个正方形的边长等于 8，而 x 就是较小正方形的边，等于 $8-5=3$。

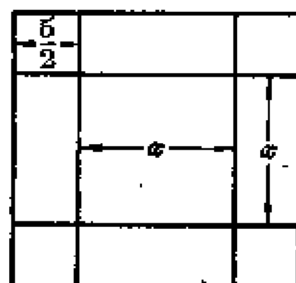


图 17

阿尔-花喇子模对于方程 $x^2+21=10x$ 所作的分析解法，可以叙述成这样："把根（未知数）的数（即一次项的系数——译者注）二等分，得到 5。把这个数自乘得 25。从积里减去 21 得 4。把 4 开平方得 2。从根数的一半(即 5)里加上或减去这个根(即 2)，得 3 或 7。"

如果运用现代的符号，那么得到如下的答案公式：

$$x=5\pm\sqrt{25-21}。$$

阿尔-花喇子模的算术著作，流传到现在的只有翻译成拉丁语的文本。这部著作对发展欧洲的数学起了相当大的作用。因为恰

恰在这部著作里，欧洲人了解到印度的写数方法，就是熟悉了印度的数字系统、零的使用、数字的位值制。由于欧洲人从书中获得了这些知识，而书的作者是居住在阿拉伯国家，并用阿拉伯文字写出了十进位制的印度数字，所以不正确地把它叫做“阿拉伯数字”。

某些题目还可以列成一次方程，阿尔-花喇子模是用算术方法，利用假设和双重假设法则来解的。其中第一种法则我们在前面已经遇到过，而第二种法则是首先给出未知数的一个假定值，然后再给出未知数其他任意的值，并为每一个算出误差，再根据所得的答案和算出的误差，得出未知数的真值。我们可以使用现在的符号把这种方法解释如下：设 $\varphi(x)=P$，其中 $\varphi(x)$是 x 的线性函数，而P是常数。第一次假设 $x=a$，第二次假设 $x=b$，将有$\varphi(a)=A$，$\varphi(b)=B$。用E表示$P-A$，用K表示$P-B$，那么

$$x=\frac{bE-aK}{E-K}。$$

完全偶然使用起来的数学术语与阿尔-花喇子模的名字有着联系，阿尔-花喇子模的拉丁化名字变为“алгоритмус”，然后变成“алгоритм”，这两个词最初的意思是印度的读数法，后来把它表示任何系统或者计算的序列(例如，求数的最大因数的欧几里得辗转相除法，解方程的辗转相除法等)。

在阿尔-花喇子模以后，作为方程学科的代数意义得以巩固下来，并能够推广到解更为复杂的方程，能够更详细地说明三角表并使三角学成为数学的独立分支固定下来等方面，中亚和近东的许多数学家继续发展了他的思想。

穆罕默德·依贝·得扎比·依贝·西朗(850～929)是九世纪和十世纪最有名望的天文学家之一，历史上把他叫作阿尔-巴坦尼。阿尔-巴坦尼出生于美索不达米亚的巴坦城，而在大马士革度过了生命的最后时刻。他在《星的科学》中使用半弦的概念，就是象印度人那样使用正弦，并且提出了与“пазуха”一词对应的错误的名

称。就在这部著作里，阿尔-巴坦尼第一次使用相当于我们的余切的概念，并编成每隔一度角的余切的表。

阿尔-巴坦尼的同乡萨比特·依贝·科拉（836～901）在近东民族数学的发展中，起了重大的作用。他的最重要的著作是：两篇关于线论的论文和一篇关于准备扩充数的概念的论文；一篇《截面图形》，它在发展球面三角方面具有重大的意义；一篇《日晷》的论文，该文所作出的法则相当于一般球面余弦定理；一篇关于黄道运动的论文，它是计算太阳在两个独立点上视运动的瞬时速度；一篇关于圆柱截线的论文，它第一次采用等仿射变换，以及计算椭圆积分的特殊情况。在萨比特的著作中发现有毕达哥拉斯定理的独特的直观证明。

天文学家和数学家穆罕默德·阿尔-布兹扎尼·阿布尔-威发（940～998），根据出身是波斯人，他编制了每隔 10′ 的正弦表，并且这个表精确到第四个 60 进位制的符号，即用 60 进位制写法是 $\frac{1}{60^4}$。此外，他成功的想法是，在计算时把半径作为 1。阿布尔-威发使用了名之为直影和倒影的正切和余切（这样的名称是由于垂直钉入地面的木桩和它的影长，可以看作是直角三角形的两条直角边，这两条直角边的比给出了阳光射线斜面所成角的正切和余切），并用了正割与余割。也是阿布尔-威发揭示出他所使用的全部三角量之间的关系。

在十一世纪初出现了巴格达数学家阿尔-卡拉吉的著作。他所写的代数著作叫做《阿尔-发赫利》。在这部著作里提出了开高于二次方根的方法。他把二次方程的解法区分成几何解法与分析解法。此外，还有如下高次方程的解法：

$$x^{2n} \pm px^n = \pm a。$$

在阿尔-卡拉吉这部著作里有求自然数的平方和与立方和的

表达式。在另外的著作里，他把未知数的幂扩大到“无穷大”，把牛顿二项展开式推广到任意 n 的情形。

作为方程学说的代数，它的发展在东方许多数学家那里，找到了自己的地位。

在这方面，对于我们最有兴趣的是数学家、诗人和哲学家奥玛尔·海雅姆（1040～约1123）。他出生于阿什哈巴德的南方，现在属于伊朗范围的纳沙浦城。

奥玛尔·海雅姆从祖先那里继承了对诗的爱好，因此他的荣誉直到现在没有衰落。但是除了诗以外，海雅姆对哲学和数学很有兴趣。在信仰上，他大概不是无神论者，但是他在自己的某些诗里，对整个宗教流露出强烈的否定态度。例如我们可以摘出他的四行诗，证实所说的正确性。

奴隶之神隐藏在偶像和卡阿巴[①]里，
寺中悠悠钟声酷似奴才恭顺的语言，
奴隶的卑鄙烙印无异放在念珠和十字架上，
也仿佛放在教堂和面向麦加的壁龛里。

《关于代数问题的证明和阿尔-穆卡巴尔》的论文是海雅姆的主要数学著作，在这部著作里，他把代数分出来作为完全独立的数学学科。海雅姆在上述论文中，把一次、二次、三次代数方程加以分类，根据分类，规定方程的次数和它的项的排列。方程的排列应当满足一个条件，即要使无论是方程的右边或者左边都没有负项。

为了解三次方程，他使用了几何的方法，并且达到了目的，就是考察两条曲线相交，即两条抛物线相交，抛物线和圆相交，等等。

海雅姆的代数论文精彩之处还在于解几何问题时，使用了代数的方法。在这方面他可以作为笛卡儿的遥远的先驱者。

除了代数论文外，海雅姆还写了其他的数学著作，他的《为欧

① 卡阿巴是麦加的清真寺，伊斯兰教朝参的圣地。——译者注

几里得几何原本中困难的公设所作的注释》，在很迟以后的东方数学家的著作里还能找到反映。

与阿尔-花喇子模所处时代最接近的中亚细亚学者之一是阿尔-法拉比（870～950），他在十世纪发展中亚的科学和哲学中起了很大的作用，他在哲学上是亚里士多德思想的继承者和宣传者，同时代的人据此把他叫做“亚里士多德第二”。阿尔-法拉比对亚里士多德数学的原始概念方面的思想，特别感兴趣。这种兴趣使他转向研究欧几里得的《原本》，并开始写《欧几里得第一和第五卷书的引言难点的注释》。在阿尔-法拉比的这本书里，追随亚里士多德，清楚地反映出关于几何概念抽象性的思想。

阿尔-法拉比从事无理数的研究，他的几何作图方面的著作也已众所周知。但是他的著作的特殊重大意义却在于，引起了阿尔-法拉比的同时代人对亚里士多德著作的关注，这就促进了一系列专门学术著作的出现。

我们应该把哲学家、天文学家、数学家、地理学家、历史学家和诗人阿尔-比鲁尼(973～1048)，列入十世纪末和十一世纪初伟大的科学创造者的行列。阿尔-比鲁尼诞生于花喇子模的首都恰阶(现在苏联乌兹别克的比鲁尼城)。他在印度生活多年，在那里他第一个向印度学者介绍了希腊数学家和天文学家的著作，说出了许多在那时先进的科学思想，这些思想经过500年后才在文艺复兴时代欧洲科学家的著作里得到发展。他写的著作超过150部，其中三分之一属于天文学著作。他的论文《天文学的钥匙》直到现在还没有发现。但是《星的科学初阶》一书保存了下来，它的内容是通俗地叙述数学、天文学和星相术的原理。在他的《关于求圆的弦》一书里，把一系列原来的方法与从几何和三角中得来的证明，作了详细的研究。在长篇的题为《马苏德规律》的论文里，阐述了与现在的三角测量方法相类似的，用三角方法求地理的经度的方法。阿尔-比鲁尼的著作《解释的书》，其中保留下来的两章

专门介绍了几何和算术的基本概念。阿尔-比鲁尼的大量著作，哲学著作和内容来自人类知识各个方面的科学著作，引起了人们很大的兴趣。顺便提一下，从这些著作中，我们知道了他的世界观所特有的唯理论的怀疑主义和对宗教迷信的鄙视态度。我们发现他的主张就是我们的宇宙特征不是以地球为中心，而是以太阳为中心的学说。阿尔-比鲁尼的著作几乎包括了整个知识领域，在他的那个时期，阿拉伯的东方人们都研究他的著作。大约1000年前，他写出了题为《前辈的文献》的论文，内中叙述了不同民族的计算时间的方法，显示作者在天文学和数学方面有高深的知识。



纳速拉丁·阿特-图西

中亚细亚人民进一步发展数学受到很大的延缓，因为他们的国家既从西方，又从东方遭受了残酷的入侵。1055年，巴格达被土耳其人征服。1256年，蒙古的征服者成吉思汗之孙旭烈兀彻底毁坏了巴格达，并把阿塞拜疆马拉古城作为自己的首都。在这个城里有非常出色的天文台，建立这个天文台的发起人是大数学家和天文学家纳速拉丁·阿特-图西（1201～1274或1277）。他是把天文学的表推广到整个亚细亚的创始人，在天文学方面有着很大的功绩，同时对数学来说，他又做了很多工作。在那时，欧几里得的著作给了他最好的启示。纳速拉丁·阿特-图西对欧几里得的《原本》发生兴趣，他研究了海雅姆的几何著作以后，对欧几里得的著作作了一系列的补充。在他的对《原本》的注释里，他对欧几里得关于平行

线假设[①]的说明作出了尝试。纳速拉丁·阿尔-图西顺便得出平行线的许多结论，为进一步发展平行线理论起了很大的作用。

阿特-图西在《关于四个完全拥护者的论文》的著作里给出了球面三角的原理。这部著作，除了理论之外，还有一项意义，就是将三角作为数学知识的一个独立部分加以叙述。

在十五世纪上半叶，卓越的乌兹别克的政治家和学者兀鲁伯在撒马尔汗建立了极好的天文台[②]。在这个天文台工作的伟大的学者、数学家之一是阿尔-卡西（出生日期不详，死于约1436年），他是大约在1420年由兀鲁伯聘请来的一位伊朗数学家。他写出了大量的数学和天文学的著作。其中对发展数学有特别重要意义的是《算术的钥匙》和《圆周的论文》。



兀鲁伯

阿尔-卡西著作的出色成果之一，是他引进了十进制分数[③]。在阿尔-卡西写于1426年的著作《圆周的论文》里，第一次发现十进位制分数。在这篇论文里，他把圆周长与直径的比不仅用六十进位制分数表示，也用十进位制分数表示。同时在这篇论文里，说明了十进位制分数怎样进行乘法和除法运算。

阿尔-卡西在《算术的钥匙》里，详细地叙述了十进位制分数的理论，并指出把六十进位制分数化成十进位制分数的方法。为

① 在阿特-图西以前，海雅姆试图证明这个假设，但阿特-图西的方法更为简单。

② 兀鲁伯是蒙古的统治者帖木儿（达梅尔兰）的后代。死于刺客之手（B. Д. 奇斯佳科夫注）。

③ 不久前查明，在阿尔-卡西以前，阿尔-乌克利季西使用过十进制分数。

了把分数中的整数部分从分数中分离出来，他使用了不同的方法：有时他利用垂直线把整数部分与分数部分分开，同时在第一部分上面加注"整的"。在另外的情况下，第一部分用黑墨水写，而第二部分用红墨水写。有些场合下，在每个数字的上面写出它的数位。阿尔-卡西在实践中引入了十进位制分数，显然为了使广大人们知道这个问题，所以他的数学论文比较通俗，更易于理解。他自己写道：用十进位制分数表示圆的周长与直径的比，目的是为了使"不晓得天文学家用六十进位制计算的人能够掌握十进位制分数。"阿尔-卡西引进十进位制分数后也十分注意用把数四舍五入的方法使计算简化，略去在计算时没有意义的数位。

在《算术的钥匙》里有任意自然数幂的二项展开式。阿尔-卡西为了把数开任意次方而运用这种分解。就在这里，我们发现有近似计算任意次根的式子，那时他的前辈只有计算平方根那种类型的表达式。阿尔-卡西以前的作者的近似开方，可以表示成现在的公式：

$$\sqrt{A^2+a}\approx A+\frac{a}{2A+1}。$$

而阿尔-卡西的表达式，可以用公式写成：

$$\sqrt[n]{A^n+a}\approx A+\frac{a}{(A+1)^n-A^n}。$$

在《算术的钥匙》里，阿尔-卡西还给出了各种类型的许多有趣的题目。为了评论这些题目，我们摘出其中几例。

1. 我们想求出这样的数，把它加倍，再加上1，把和乘以3，再加上2，然后乘4，再加3，得到95。

注：阿尔-卡西对这个题目作出三种解法：代数解法，即用"还原和对消"的方法解方程。然后用反求法。最后用二重假设原理的方法。

2. 人们走进花园，第一个人摘下一个石榴，第二个人摘二个，

第三个人摘三个，以此类推，即给每一个人增加一个。后来，所有的石榴都摘完，平均分配，每个人得到六个石榴。请问人数是多少？

3．有两棵棕榈树垂直于地面．其中一棵高 20 肘，① 另一棵高 25 肘，这两棵棕榈之间的距离是 60 肘。它们之间有一条河或者水池。在每一棵棕榈上停留一只鸟，它们看见水中有一条鱼，于是都向着鱼的方向用相同的速度沿直线飞去，同时获得了鱼。它们飞行相遇在两树根之间的直线上。我们想要求出，每一只鸟飞行了多少肘，以及它们原来的地点和相遇地点之间的距离，也就是鱼的所在地与每棵树根之间的距离。

在《圆周的论文》里，特别注意确定圆周长与直径的比．大家知道，阿基米德提出 π 的值等于 $\frac{22}{7}$，并且为了得到这个数，他使用了圆的内接和外切正 96 边形的周长代替圆的周长。阿尔-卡西使用阿基米德的方法，利用外切和内接正 3×2^{28} 边形，即多边形的边数是 800335168。当然，这使阿尔-卡西能够获得更加精确的 π 的值。根据他的计算把结果表示成十进位制分数，得到的值是 $2\pi=6.2831853071795865$。在这个式子里，π 共有 17 位正确的十进位制数字。②

我们简短地评论了中亚细亚和近东各国数学的发展，可以得出结论，这些国家的人民对数学的发展给予了进步的影响，同时，主要的成就是，他们创立了把方程作为一门科学的代数学，并把三角学作为数学中的独立分支来作深入的研究。除此之外，他们重要的成果是：简化了计算、发展了近似计算的方法、开方、建立了十进位制分数，以及其他等等。

---

① 肘系古代的一种长度单位，自肘到中指尖的长度，约合半米。——译者注

② 我国南北朝时代南朝的科学家祖冲之（429～500），推算出圆周率 π 的值在 3.1415926 和 3.1415927 之间，并提出了 π 的约率 $\frac{22}{7}$ 和密率 $\frac{355}{113}$，密率值要比欧洲早千多年。——译者注

西欧数学家在数学领域内独立发现的最初时期

从十二世纪开始，在西欧长时期的停滞以后，对整个科学的兴趣，特别是对数学，出现了某个高潮。这个高潮说明了一系列社会经济的和政治的情况，其特点是在西欧大多数国家里，最终形成了封建关系的时代，城市成为手工业和商业中心发展的时代。

在十一世纪以前，封建社会主要是由两个阶级组成：封建大地主与农奴和半农奴的农民。农民在自然经济的统治时期，用实物产品和农村手工业的简单制品（布匹、铁器等等）给封建主交租赋。从十一世纪起，随着技术开始发展，从农民中间分离出一些手艺人，就是各种手艺的专家。他们赎免了自己被统治的地位，断绝了与乡村的联系，迁往城市，在那里他们的生产品渐渐地成为城市市场的商品。农民也将农产品拿到城市的集市上去交换或出卖。在十一世纪以前，只是行政机关或者军队为中心的城市，就这样地成为商业和手工业的中心，有着经济意义。城市人口也因此急剧增长。然而，商业的迅速发展和城市的繁荣使阶级矛盾尖锐起来了。集市上大量的商品，其中包括从东罗马帝国（拜占庭）和从东方各国运来的奢侈品，引起了封建主欲望的增长。小封建主从土地收入来说，已经不敷用度，需要增加新的土地。为了增加实物租赋而压制农民，以及后来的增加货币地租，都激起了农民的愤慨。此外，农民自己也遭受了歉收，经受了极端的贫困。大封建主力求使自己的收入能成倍地增加，他们不仅用攫取新土地，而且用取得新市场的方法，以便于销售已到他们手里的农民的劳动产品。

十一世纪末，上述整个情况促使组织了所谓向东方的“十字军远征”。由于天主教会行祝福仪式，这些远征蒙上了宗教的形式，仿佛是为了把在巴勒斯坦的“上帝的棺材”从“异教徒”手中解放出

来。事实上，十字军远征是封建主的军事远征，他们有着非常现实的目的：取得丰富的俘获物，侵占新的土地和东方市场，以及取得不用花钱的劳动力。

起初农民也参加这些远征，他们期望把自己从农奴制关系中解放出来，或者在东方获得土地。

由于商业贸易和一系列的十字军远征（从1096年到1270年），欧洲人熟悉了比欧洲文化高得多的东方文化。同时也熟悉了东方的工业和农业技术。所有这一切促进了欧洲的科学加速发展的进程。

特别是欧洲商业的扩大，带来了相当复杂的计算，这种情况促进了欧洲数学的发展。关于票据的复杂运算，不同民族各种货币本位制的换算，商品流通等要求复杂计算的必要性，这都引起了特殊方式生产和计算方法的需求。

在这个时代里，欧洲产生和使用了三重法则：连比法则、混合法则和其他法则。出现了希腊和阿拉伯数学著作的译本。在欧洲产生了第一批学者——数学理论家。意大利学者列奥纳多·斐波那契，又叫列奥纳多·皮扎斯基（约1170～1228以后），可以作为一个例子。列奥纳多的父亲，曾在属于比萨商行所有的阿尔及利亚海外商站工作。列奥纳多·斐波那契在阿尔及利亚受到教育。由于商业事务，他多次去埃及、叙利亚、希腊、西西里和布罗温斯旅行，获得了数学方面的知识以后，他决心写一本介绍带有数学原理的"拉丁民族"的书，使他能比较成功地作出与数学计算有关的商业计算。

这本书写成于1202年，叫做《算盘书》。列奥纳多在1228年把这本书加以补充，作为修订本出版。在这本书里，采用了印度的数字和零，叙述了关于整数和分数的很多实用的计算方法，解释开平方和开立方的方法。书中还有求商品价格的"主要方法"的法则，也就是三重法则，复合的三重法则，比例分配，连比法则，以及

确定金属样品的方法。其次有一章《关于算盘问题》，实质上它叙述了代数知识，因为在这章里，分析了一次方程的解法化为用简单的二重假设原理的问题。列奥纳多用“物品”一词表示未知数，这是借用东方人民的。在同一章里，介绍求平方根和立方根的方法，同时还研究了根式的算术运算，以及用几何的方法解释形为$a\pm\sqrt{b}$的二项式的运算。列奥纳多把这种形式的表示式叫做二项式，二项式$6-\sqrt{20}$乘以二项式$3-\sqrt{5}$的运算，他表示成求矩形的面积。为此作一个矩形，使它的边ad和ab的长度分别为6和3（图18）。在这两条边上截取线段de和bk分别等于$\sqrt{20}$和$\sqrt{5}$。过点e和k作直线分别平行于矩形的边，这样又得到一个矩形，它的面积就是所求两个二项式的积。

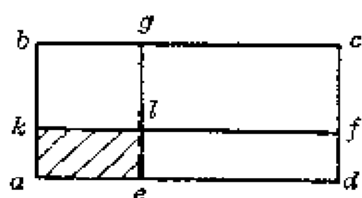


图 18

列奥纳多所用记号的特点是，在表示线段时，或者用两个字母表示，把字母分别写在线段的始端和末端，或者只用一个字母表示，并写在线段的始端。因此在实施线段运算时，列奥纳多用表示线段写法的字母所表达的量来运算。

列奥纳多的书里也有代数问题和阿尔-花喇子模那种形式的比例的理论。他在解二次方程时象阿尔-花喇子模一样，没有承认负数根，但是我们从他的一个题目里发现，对负的量有某些暗示。题目是需要求属于若干人的货币的和，列奥纳多解完这道题时，得出一个结论，解是不可能的，“除非认为，其中一个人有负债，而不是钱财”。

《算盘书》为欧洲读者提供了东方各国人民所获得的数学知识的全貌，在这方面它有着重大的意义。此外，在这部著作里，列奥纳多第一个在欧洲开始应用代数解几何问题。同时，他较出色地理解了算术、代数、几何有着相互联系，这三者之间应该“彼此帮助”。

除了《算盘书》以外，列奥纳多还写了几本其他的数学著作，同时我们在代数性质的著作里发现形如

$$x^3+2x^2+10x=20$$

的三次方程有趣的近似解法。列奥纳多给出了这个方程的答案精确到六个 60 进位制的记号。在同一部著作里还有不定方程的题目，列奥纳多对不定方程给出了特殊的解法。

列奥纳多写于 1220 年的纯几何著作之一《实用几何》有着重大的意义。他在这本著作中运用了欧几里得和希腊其他作者的作品，阐明的问题有：求平面上直线图形的面积、圆的度量、多边形、球和圆柱。顺便提一下，在《实用几何》里，对长方体一条对角线的平方等于其三度的平方和的问题作出了证明。还作出了海伦定理和三角形三条中线相交于一点的性质的证明。在这部著作里还发现有利用代数演算的几何作图题目。例如，利用代数方法解这样一个题目：在等边三角形里内接一个正方形，正方形的一条边在这个三角形的底边上。

从十世纪开始，罗马人波阿齐所改进的算盘计算，在数学计算中得到广泛的推广，后来又得到赫伯特的理论根据。这种计算的拥护者，象以前所谈到过的那样，获得了算盘派的名称。但是从欧洲出现东方国家数学家著作的译本起，使用零的印度数字拥护者的方法和数字位值制的方法，是与算盘派使用的计算方法相对立的。第二个派别的代表叫做算术算法派。毫无疑问，应该认为算术算法派的方法是先进的，因为他们在许多方面都超过了算盘派。算盘派不使用零，他们只在特殊情况下开二次方，而那时算术算法派已能自由地开三次方。最后算盘派在自己的计算里遵循起源于罗马的十二进位制分数，而算术算法派采用六十进位制分数，其优点是写法方便。

随着作者作品的不断传播，算盘派的方法失去了意义。列奥

纳多的著作使算盘派受到决定性的打击。虽然他的书叫做《算盘书》，但是这书在欧洲给算术算法派 ① 带来了最后的胜利。

十四世纪许多作者叙述了数学问题，尤其是几何问题，但是他们的大多数著作里没有任何新的观点，因为作者的思想受到天主教教会的经院哲学枷锁的束缚。

在这一世纪里某些欧洲国家所建立的外部条件，也不能促使科学自由发展。在英国和法国之间，从 1337 年到 1453 年的百年战争，使这两个国家遭到延续破坏。欧洲流传的鼠疫给它的居民带来了不可估计的灾难。

英国数学家、坎特伯雷大主教托马斯·布拉瓦丁(1290～1349)是十四世纪著名数学家之一。他写了《抽象几何》一书。在这部著作里，布拉瓦丁十分注意对星状多边形和等周图形的研究。他建立的下列原理很有趣。

在等周长的多边形中，角的个数较多的那个多边形具有最大的面积。

在顶点数相同的等周长的多边形中，等角多边形的面积最大。

在等周长和等角多边形中，如果有相同的顶点数，那么等边多边形的面积最大。

在等周长的图形中，圆的面积最大。

此外，布拉瓦丁补写了去欧洲实践时他从东方人那里借用来的三角概念的序言。他运用表示正切和余切的概念，并把它们命名为“umbra versa”和“umbra recta”，就是在他所研究的史料里记载的“倒影”和“正影”。

一度任教于巴黎大学的诺曼底主教尼古拉·奥力森（1323～1382）是十四世纪又一位杰出的数学家。在他的著作里第一次发现分数幂的概念和它的表示法。可是这种幂的写法要占很大的地

---

① 在《算盘书》里，列奥纳多没有把作为计算工具的算盘给予记载。某些历史学家认为，在这里“算盘”一词应当理解为整个计算的数学。(B. Д. 奇斯佳科夫注)

位。这种写法没有保存到我们的时代。

奥力森闻名于世，也是因为他在数学中使用了类似直角坐标法的方法。奥力森的坐标系是矩形的两条边：长(longitudo)和宽(latitudo)。奥力森这个坐标法既可以用于研究几何图形，也可以用于考察自然现象。

中世纪后期数学家对古代作者的著作所产生的兴趣，以及由此引起欧洲学者独立的创作得到发展，特别在十五世纪和十六世纪，这些情况有力地反映出来了。当在特殊的政治和经济的条件影响下，欧洲进入了一个获得科学和文艺复兴时代名称的历史时期。

科学和艺术复兴时期

从十五世纪中期到十六世纪末期，这段时期称为文艺复兴时期，它的特点是，西方和欧洲中部一系列国家的科学和艺术的发展有了很大的高涨。有些作者认为，这个时期的主要特征是古罗马的科学和艺术的复兴，它的出现是由于对古希腊和罗马的文化产生了兴趣的结果。实际上，这种进步说明了社会经济有了较大的进展，这是由车间生产进入新的社会制度并以此取代衰亡的封建制度所决定的。这种新的社会制度是与新生产关系相适应的资本主义制度。从十五世纪起，新的阶级，即与封建制度进行阶级斗争的资产阶级开始迅速地发展起来。这个时期的特点是，以车间手工业生产代替工场手工业。在工业中使用了最简单的机器(水轮、改良的织布机、以后的测风仪、挖土机、起重机等等)，这就需要知道综合技术知识，就要进行计算和解决一系列机械的和数学的问题。工场手工业的发展，大幅度地增加了工业产品的数量。资产阶级为了推销这些产品不得不扩张自己的市场网点，这就促进欧洲人寻觅和开辟新的国土。1492 年热那亚人克里斯多芬·哥伦布(1451～

1506)，希望找到通向欧洲人所向往的富饶的印度的一条捷径，他航行到新大陆的海岸，即美洲大陆。稍晚一些时候(1497～1498)葡萄牙人瓦斯哥·达·伽马(1469～1524)从南方绕过非洲开辟了一条通往印度的道路，而他的同胞费朗·麦哲伦(约1480～1521)完成了第一次的环球旅行。

这些发现大大开阔了欧洲人的视野，并激起了科学家的求知欲望。航海技术的发展引起需要大量计算工作和综合的天文学知识的进一步发展，正在兴起的资本主义工业技术也要求天文学进一步的发展。同时，那时候欧洲的数学不能充分地为兴起的需要服务：算术计算技巧过分笨拙，代数的符号写法还没有发展起来，而借助代数符号可以容易地使代数普遍化。欧洲的三角学还处于萌芽时期。所有这一切迫使学者走上新的探索数学的道路。复兴时期对数学来说，主要是发展解方程方法的符号体系，把三角学作为完整独立的数学分支固定下来，到复兴的末期形成了完整的对数体系。

这个时代强大的进步运动——人文主义，为将人们从迫使放弃现实生活中的知识、迫使放弃致力于科学观察、迫使放弃唯物主义倾向性实验的天主教教会控制下解放出来而奋斗，人文主义同样也促进了复兴时期各项科学的顺利发展。人文主义宣布新的原则，对人和对无穷无尽精神力量的信念是这些原则的基础。

1438年约翰·古腾堡(约1400～1468)发明了铅字，即印刷用的字母，并在1453年诞生了第一本铅印的书。从此，为在欧洲传播科学知识开辟了广阔的前途。

也是在1453年，希腊-罗马帝国的首都(伊斯坦布尔)被土耳其人侵占了，后果之一是，许多帝国的居民携带着希腊和罗马学者的手稿，逃跑到西欧一些国家。欧洲学者在许多场合下第一次能够了解这些手稿。他们在研究这些手稿之后，就能够为欧洲的科学作出许多结论。

上述社会经济的和政治上的条件，使复兴时期欧洲数学家的工作出现了生气勃勃的景象。

在德意志和意大利最早出现复兴思想的传播，后来又在西欧其他国家和中欧部分地区得到传播。

第一批铅印的数学书籍在德意志出现了。在1482年出版了乌布利希·瓦格涅尔编写的算术。1489年在莱比锡也印刷了扬·韦得曼的数学书籍，书名为《各种贸易用的最优速算法》。在数学史上，韦得曼第一次在大学讲台上(在莱比锡)讲授代数课程。在这本算术论文书里，韦得曼叙述了整数和分数的簿记业务，也叙述了比例的理论，求等差数列与等比数列各项和的问题。书中有一个部分专门介绍几何问题。在这一部分中有许多有趣的问题。例如，根据已知三角形的三条边计算它的面积，就是海伦公式的推导。已知三角形的底边、高和底边被高分成的小的线段，推导求三角形外接圆半径的法则。

在瓦格涅尔和韦得曼的著作里，首次遇到符号"＋"、"－"，这个情况对发展数学符号体系具有特殊意义，关于这些符号的来源存在着各种看法，很难断定那一种说法是正确的。根据其中的一种说法，这些符号是从商业实践中借用的。大家都知道，酒商在从大桶里出售酒时，用横线条标出从桶里减少了多少酒，当桶里酒的储量恢复到原状时，为了表示早先取掉多少酒又补足了，再用竖线条把原来做的横线标记划掉。这样得到的结果是，在减的时候(即把桶里的酒倒出时)就出现符号"－"，而在加进的时候(即往酒桶里灌进酒时)就出现符号"＋"。

瓦格涅尔也好，韦德曼也好，都是属于称为"коссист"的数学家。这个名称是从意大利的cosa一词而来的，意思是"物品"。那个时候的数学家用这个词表示未知数。因此，коссист一词我们可以理解为代数学家。德意志的代数学叫做Kossische Kunst(代数术)。

十五世纪德国数学家中有名望的代表应当是约翰·缪勒。

以里基奥蒙田纳斯的名字载入史册的约翰·缪勒(1436～1476)出生在小城哥尼斯堡，缪勒的名字就是取用这个小城已经拉丁化的名称①。缪勒在著名教授天文学家普尔巴赫(1423～1461)的领导下，在维也纳大学工作时继续编写他的天文学和数学著作。在普尔巴赫死后，缪勒曾发表了他们共同的作品《简述托勒玫巨著》。

《论不同类型三角形的五本书》是缪勒的主要数学著作。在欧洲人中，缪勒第一个在这些书里将三角学作为数学独立的一章加以系统的叙述。缪勒假设把圆的半径分成10000000份，因而能用很大的精确度，并且用十进位制分数表示三角值。可是缪勒本人只在使用直径和半径的情况下，才采用十进位制分数，而在另外的情况下，他则使用六十进位制分数。因此他的十进位制分数进入数学历史时没有被人们注意，无论是他的同时代的人，也无论是当时的拥护者，他们都没有采用过。缪勒的书里有着我们现代三角学的主要特征。例如，根据已知元素给出任何类型的三角形的解法。书里还列有三角值的表，缪勒成功地编出了每隔1度角的正切值的表，以及每隔1秒角的正弦表。

在缪勒的书里还包含着其他数学分支的内容。在某些题目里可以找到数论的有趣的例子。许多几何题采用了代数解法，即把它们化为解方程。同样有趣的是，根据三角形的已知三条边，求它的外接圆的半径，并证明三角形的三条高相交于一点。在欧洲，缪勒的书里第一次出现了最大值和最小值问题。

缪勒向欧洲介绍了许多古典数学家，并译出他们的作品，这是缪勒在发展数学事业上最大的功绩。他翻译了阿波罗尼斯、阿基米德、海伦的著作和托勒玫的《至大论》。

---

① "里基奥蒙田纳斯"（拉丁文是 Regiomontanus）就是"王山"，德国名字哥尼斯堡(Königsberg)也是同样的意思。

十六世纪上半叶数学家米哈依尔·史提非（约 1486～1567）应该说是最优秀的德国代数学家。他出生于德国埃斯凌格城，青年时期就被送到奥古斯丁修道院，在那里他接受了初期教育。以后他加入了宗教改革运动，是路德的拥护者之一。起初，他很大的天赋才能用于不正确的道路：教会的宗教神秘主义学说发展了数的神秘主义的观点，于是他对寻找宗教书里发现的数的神秘涵义基本上发生了兴趣。史提非试图从这些数的关系中作出实用的结论，他在自己的伪科学论文里，预言在 1533 年10月19日世界将永远消灭。当他所预言的这一天，世界平安无事时，史提非深为震惊，他深信，他的话是以数的神秘主义为根据的，不适合于现实世界的法则。此外，在此之前对他的知识不抱怀疑态度的人对他的信仰将会丧失，这就威胁着他的威望。这样的震惊倒是有着好的一面。从那时起，史提非对神秘主义的计算就再也不继续下去，而把自己的全部精力用于创作真正的具有科学价值的作品上，深化数学知识。他研究了德国和意大利先驱者的数学著作，并写出了几篇数学论文，其中最有价值的论文是发表于 1544 年的《整数算术》。

史提非在自己的数学著作中深入研究了数的问题，其中对于发展数学最有价值的是：引进了负数和负数运算；求自然数幂的二项展开式的系数；第一次暗示数的某些性质，它们被后来的作者发展成对数的概念；指数方程的解法，还引进了代数运算方法的某些符号。

至于负数，史提非把它看作实在的数来用的，把负数命名为“比零小的数”。这样的名称使许多与史提非同时代的人困惑了。他们认为，既然零表示什么也没有，那么小于零就怎么也不可能。这样就稍许耽搁了负数的普遍使用。史提非本人明显地建立了负数的思想，并且作出了正数、负数的乘法和除法的表格。

乘法:	0+ 6	0− 6	0+ 6	0− 6
	0+ 4	0− 4	0− 4	0+ 4
	0+24	0+24	0−24	0−24

除法:	0+24	0+24	0−24	0−24
	0+ 6	0− 6	0+ 6	0− 6
	0+ 4	0− 4	0− 4	0+ 4

史提非虽然运用负数，但他还是认为负数是荒谬的数，而正数才是真正的数。关于零的问题他说，零是位于真正的数和荒谬的数之间。但是，在下列的说法中，他承认负数存在的合理性："正如我们想象一个数有不同的根，尽管它并没有这些根，但是这样想象对于在数学中应用高次幂是有益的；同样地，我们想象比零还小的数也不是没有好处的。"

在同一部著作里，史提非把两个数列——等差数列与等比数列——加以对照，等差数列的公差等于1，等比数列的公比等于2。

$$\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$$

$$\cdots, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \cdots$$

并作了下列注释："等差数列的加法对应于等比数列的乘法①。等差数列的减法对应于等比数列的除法。等比数列的自乘对应于等差数列的乘法，就是等差数列某项的两倍对应于等比数列的平方。等比数列开平方对应于等差数列的除法(除以2——译者)。"史提非懂得进一步发展所说的思想具有怎样巨大的意义，但是仅限于注释："因此，若是可以写出一本论数的不可思议性质的完整的新书，我应该放弃这一点，并闭了双眼离开。"这样一来，史提非接着产生取对数的思想，而这种思想没有得到发展。不久这种思想由

① 求等比数列任意两项的积，只要计算等差数列中对应的两项的和即可。例如求4×8，4对应的等差数列的数是2，8对应的数是3，2+3=5，5下面的32就是所求的积。其他几种情况类似。——译者注

史提非事业的继承者在实践时得到体现。

史提非在《整数算术》里，同样解决了关于两个数的比除以另外两个数的比的问题。这时应用他关于两种数列对照的想法，就相当于解指数方程。例如，需要把$\frac{2187}{128}$除以$\frac{27}{8}$，他实际上是在解下面这种形式的方程：

$$\left(\frac{27}{8}\right)^x=\frac{2187}{128}。$$

经过某些十分复杂的计算之后，他得到正确的答案是$x=2\frac{1}{3}$。

近东和中亚细亚的一些国家，早已知道自然数幂的二项式的展开式，可是在欧洲复兴时期的数学作品里，才第一次发现这个问题。特别是史提非给出了直到17次幂的二项式系数的表达式。他求二项式系数所使用的方法，可以表示成如下形式的表。

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
…	…	…	…	…	…	…	…	…	

组成这个表的原则是这样的：每一横行都是从1开始。第一横行由1组成，其余各横行的每一个数可以用把上行的数相加的方法得到：把上行一个数和左边紧靠它的数相加，就得到它下面的那个数。例如，第四横行的第二个数，是把第三行的第一个数与第

二个数相加得到的。如上表，每第 k 行给出 $(k-1)$ 次展开式的系数。这个方法的根据是下面的公式：

$$C_m^n = C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1}。$$

在发展代数中应当将史提非推广的代数符号列入他的功绩。为了给算术运算作上符号，史提非已能将 + 与 - 的符号运用自如，这种符号在十五世纪末才引入德意志。为了表示乘法与除法，他采用符号 m 与 d，它们是表示这两种运算的词的第一个字母(multiplicatio 与 divisio)。为了表示未知数，史提非采用德文字母 R，它是 Res 一词开头的字母，表示"事情"、"物品"的意思。对于未知数幂的符号，他利用了斐波那契用过的名称，就是说未知数的平方用词 zensus 表达，它表示"财产"，而高于二次的幂用词 cubus、zensi-zensus、zensi cubus 等等表示。为了表示各次根式，象所引进的符号一样，在书写这些词时用省略的方法表示：z、c、zz、zc 等等。史提非表示根号的符号类似于我们现在所使用的。他用拉丁字 Nabix (根)的第一个字母表示根号，并伴有指出根的次数的字母。例如平方根写成 $\sqrt{z}$，立方根写成 $\sqrt{C}$，等等。史提非在《整数算术》里把方程写成

$$116+\sqrt{z}41472-18\mathrm{R}-\sqrt{z}648\mathrm{z} \quad \text{aequantur } 0,$$

用现在的符号写就是：

$$116+\sqrt{41472}-18x-\sqrt{648}\,x^2=0。$$

现在我们介绍意大利文艺复兴时期数学的发展。首先应当说一说意大利天才的画家、雕塑家、建筑师、机械专家和数学家列奥纳多·达·芬奇(1452－1519)。

列奥纳多的大部分生活是在十五世纪意大利最进步的城市佛罗伦萨度过的，人文主义的科学在这里达到了空前的繁荣。他的

父亲是殷实的公证人，母亲是个农民。列奥纳多在佛罗伦萨著名雕塑家和绘画家安得列·维罗克奥（1435或1436～1488）那里学习时，学会了数学原理和透视以及素描艺术。以后他在艺术部门工作时，总是在研究自然界的同时也研究力学和数学，这两个方面的结合在复兴时期是非常普遍的。



列奥纳多·达·芬奇

列奥纳多是一个勇敢的实验者，他为严格地、科学地研究大自然奠定了基础。

列奥纳多的一切研究都是依靠实验，因为他认为实践是知识的来源，同时他也认为，脱离理论的实践是没有任何意义的，并说，"专心于实践但缺乏科学的人，就象是站在大船上而没有舵和指南针的掌舵人；他无论何时也不能确定航向。"同时，根据列奥纳多的意见，没有实践，科学就不能得到发展。关于这一点，他形象化地描述说："铁器生锈，因为不予应用，……人的智慧，如果不予应用，就会干涸。"

列奥纳多·达·芬奇对数学的评价很高。这位艺术家和科学家说："任何人的研究，没有经过数学的证明，就不能认为是真正的科学。"

在数学里，引起列奥纳多兴趣的主要有下面的问题，这就是关于素描艺术和力学的问题。由于这个原因，他深入研究了透视理论，十分注意正多边形作图的理论和等分圆周。这时，他对一些作图题采用精确的作法，也有一些是用近似的作法。有些场合，他采用了限制条件，规定在作图过程中圆规的两只脚张开的角保持不

变。此外，他对等积图形的作图问题作了深入研究，解决了与已知圆等积的直线形的作图问题。为了解这种题目，列奥纳多使用了很简单的方法。用一个直圆柱，它的高等于底面半径的一半，两个底面积相等，注意到这个直圆柱的展开图，列奥纳多提出，为了作出与已知圆等积的矩形，把圆柱沿着平面滚动得出一个矩形，它的底为已知圆的周长，高等于这个圆半径的一半。在平面上描出这个圆柱侧面的图形，就得到题目的解。在列奥纳多所解出的其他几何题目中，发现有根据物体的阴影求它的高（根据三角形相似），求河的宽度，等等。应该特别提出他关于求半圆的重心和四面体重心的题目，在解法中有许多是独创的。列奥纳多在求椭圆的面积时所运用的方法，在较晚时候的数学家中才获得了发展。

除列奥纳多·达·芬奇外，复兴时期还有许多数学家曾在意大利工作。他们对意大利数学家解问题的方法特别用心研究，在他们之前，无论是希腊人、印度人，或者是中亚细亚和近东人，都没有能解决。这种问题主要归结为上面的二次方程的解法，并在数学实践中引入虚数。

我们知道，高次方程的特殊解法，对于海雅姆和其他的东方数学家是容易理解的，而斐波那契给出了这种方程的近似解法，有更大的精确度。但是任何人也没有再给出解这种方程的一般解法。因此这个问题就落到复兴时期意大利数学家的身上了。

意大利最初在三次方程一般解法的问题上，获得较大成功的数学家之一，应该认为是波伦那大学的数学教授希皮奥内·费罗(1465～1526)。至今人们还不知他使用怎样的方法，然而都知道他解出了下面形式的方程：

$$x^3 + mx = n。$$

尼科洛·丰塔那历史上被叫做以塔塔利亚（约 1499～1557）。高次方程解法理论在塔塔利亚和意大利数学家、哲学家和医生杰

罗拉莫·卡当(1501～1576)那里得到了进一步的发展,他们给出了形如

$$x^3+px^2=q \text{ 和 } x^3=px+q$$

的不完全方程的一般解法。因为每一个三次方程都可以转化为不完全方程来解，所以解不完全方程的公式可以作为三次方程一般解法的公式。

在卡当的《大术,或者论代数法则》一书中,首次记载了这些公式,因此取名为卡当公式。要判明是谁首先获得这些公式的,事实上很困难。然而有理由作初步的推测，塔塔利亚首先得出这些公式,而卡当是借用了塔塔利亚的这些公式。

塔塔利亚诞生于意大利的布里西亚城。他幼年时就失去了父亲。他的父亲是在法国士兵占领城市时被打死的。当时塔塔利亚本人也遭到苦难，他的颌部和舌头被法国士兵砍伤。这种重伤使尼科洛在整个生活中丧失了准确地说出话来的能力，所以人们叫他“塔塔利亚”,这个名字的意大利语的意思是“发音不清楚的”。塔塔利亚的母亲没有钱给儿子受教育，尼科洛自学语言的基础和数学。这并不妨碍有才能的顽强的少年在数学上达到这样的成就。起初他成为这门学科的教师,后来大约在1535年邀他在维罗那任教数学。同年他在和费罗的学生菲奥里的公开学术辩论演讲中,战胜了最后一个人,获得了关于三次方程解法问题的辉煌胜利。因为菲奥里只会解形如 $x^3+mx=n$ 的方程，可塔塔利亚提出其中另外形式的三次方程的题目,而菲奥里并不知道这些题目的解法。这次胜利给塔塔利亚带来了轰动一时的荣誉。杰罗拉莫·卡当了解到塔塔利亚的卓越发现的消息后,他对塔塔利亚特别发生兴趣。

杰罗拉莫·卡当是一位很有才能的人,他在各种知识领域里显示出自己的天赋。他曾是一个极好的医生、哲学家和数学家,他在这些知识领域里都获得了重要成果，然而他未能专心于其中一个领域里的知识。此外,他酷爱星相术这一伪科学,甚至还编写了星

占表。根据这个表，卡当满有把握地断定自己在某天某时死去，因为他在指定的时间没有死，为了证明他自己的正确性，卡当在他预言的时刻用自杀结束了生命。

看来，卡当很顺利地从塔塔利亚那里探听到他的三次方程的解法，卡当把这种解法记载在自己的作品里，不过没有隐瞒这个方法是属于塔塔利亚的①。可是塔塔利亚本人打算写一部代数巨著，在这部著作里，他的三次方程的解法应该占有显著的地位，因此卡当的行为引起了塔塔利亚的愤怒，并成为他们不可妥协的仇视的原因。

塔塔利亚的方法归结为解方程②：

$$x^3 = px + q,$$

他用新的未知数 u 和 v 代替 x。在这种情况下，因为可以任意地从中挑选一个未知数，所以他设

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = x,\quad uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

把这些值代入原方程，得 $u - v = q$。然后通过系数 p、q 求出新的未知数 u、v，并且根据下面的公式求出 x：

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} - \frac{q}{2}}.$$

因为三次方程的一般形式为

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

用 $x = y - \dfrac{b}{3a}$ 代入上式后，总可以化为塔塔利亚已经解决的不完全三次方程，因此可以认为塔塔利亚作出了三次方程的一般解法，就

---

① 塔塔利亚把三次方程解法的法则写成诗的形式，告诉了卡当，但是卡当亲自找到了它的证明。

② 我们用现在的符号来表示塔塔利亚的方法。

是找到了这个方程的根与系数之间的关系。

塔塔利亚没有写完的作品《数和度量概论》是他主要的数学著作，在这部著作中叙述的问题有：算术、代数、几何以及概率理论中的某些概念。

卡当最有名望的数学著作是我们在前面提到的《大术，或者论代数法则》。顺便提一下，该书中给出了把三次方程化成不完全三次方程形式的方法，事实上也就是解决了用系数表达三次方程的根的问题。卡当的这部著作包含着许多思想，这些思想后来得到了发展，并促进了数学的重大进步。

虽然卡当把负数取名为“虚构的”，但是在欧洲数学家中，是他第一个允许二次方程和三次方程的负数根的存在。卡当也承认方程的虚根的存在性，但是他把这些虚根称为“诡辩的”。并且认为，只有虚根的方程没有解。同时他也知道，如果方程有一个虚根，那么它应该有与第一个根共轭的另一个虚根。卡当不承认诡辩的根属于真实的根，但还是允许这些诡辩的数在数学实践中有某种意义。我们可以从分析卡当所解问题的例子中看到这一点：把数 10 分成两个部分，使它们的积等于 40。卡当的推论使他得到的答案是，所求部分应是 $5+\sqrt{-15}$ 与 $5-\sqrt{-15}$。这样一来，这两个诡辩数的和与它们的积都是真实的数。

在卡当的其他有趣想法中，还有一种关于整除的想法：如果 a 是多项式的根，那么这个多项式能被 $x-a$ 整除。最后，卡当引进了四次方程的一般解法，并指出，这个解法是由他的学生斐拉里得到的。

这样一来，洛多维科·斐拉里(1522～1565)的发现，完成了表示不同次幂方程的根与系数关系的公式汇集。虽则在以后的历史时期中，也试图得到高于四次方程的一般解法，可是这些意图未获成功，因为后来十九世纪挪威学者尼尔斯·阿贝尔指出，高于四次幂的一般形式的方程不能用根式求解。

拉法埃列·邦别利(约 1530～1572)是十六世纪的意大利数学家。他在 1572 年编写出具有很高科学价值的《代数》,邦别利在书里将方程的虚根运用自如,还作出正负实单位和虚单位的乘法表。

从复兴时期法国的数学家中，我们应该首先提出的是里昂的医生、巴黎大学的医学学士尼科利斯·舒开(出生年不详～1500)。他的著作有《关于数的科学》。这部著作的手稿还在1484 年就已完成，而到十九世纪才出版。舒开在《关于数的科学》里给出序数的名称，对意大利人较早所采用的名称"百万"，他又增加了与数 10^{12}, 10^{18}, 10^{24}, 10^{30}, 10^{36}, 10^{42}, 10^{48}, 10^{54}的符号对应的名称"万亿","一百亿亿","一亿亿亿","一百万亿亿亿","一万亿亿亿亿","一百亿亿亿亿亿","一亿亿亿亿亿亿","一百万亿亿亿亿亿亿"。其次写道:"用同样形式的关系式可以获得更大的数"。

在这部著作里,舒开非常注意符号的写法。象意大利数学家一样,他采用符号 $\bar{p}$ 和 $\bar{m}$ 来表示加法和减法。舒开使用了幂指数,并且发现有幂的负指数的符号。为了表达未知数的幂,他引入这样的写法:12^0, 12^1, 12^3, $7^{1\bar{m}}$。它们相当于我们的符号 12, $12x$, $12x^3$, $7x^{-1}$。他也是用这样的指数表示根号的次数,并且用字母 R 表示根号。

例如,舒开把 $\sqrt{16}$ 写成 $R^2\cdot 16$,而 $\sqrt[3]{64}$ 写成 $R^3\cdot 64$。

我们在《关于数的科学》里，也发现类似于较晚时期史提非所说的思想,我们认为这是对数的思想。就是说,舒开把等差数列与等比数列加以比较,即

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \cdots\cdots$$

和

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$$
$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ \cdots\cdots$$

同时他指出，等比数列中任何两项的积，等于与这两项对应的等

差数列的数之和①。



弗朗西瓦·韦达

十六世纪末，法国另一位数学家弗朗西瓦·韦达(1540～1603)的著作，在发展现在的符号代数中有决定性的意义。他职业上是法学家和国王宫庭有名望的国务活动家(国王的机要谋士)。韦达把所有的空闲时间都花费在数学上，他专心于数学到这样的程度，有时解某些个问题时，竟连续几个夜间不睡觉。他的主要著作是《分析法引论》，韦达在自己的数学著作中，除了改进代数符号以外，还发展了解方程的理论，在几何中扩大了应用代数的范围，开始在代数中使用三角，促进了三角学的很大发展。

韦达的主要功绩是把字母表示数的写法引入代数。重要的是，他不仅用字母表示未知量，而且还用字母表示数字系数。韦达的符号能够适用于一般的量，这是他著作的最主要的优点。他使用的正是“系数”这个词(意思是“促进的”)。韦达开始使用的放在数字上面或者放在字母上面的线条符号，具有我们的括号的意思。

在方程的理论里，韦达在解高次方程时，总是把所给方程化为不完全方程。例如，解二次方程时，他把方程中一次幂的未知数消去，这一点在下面说明。我们利用现在的写法作出它的推论。

设需要解二次方程

$$x^2+px+q=0。$$

① 例如等比数列的两项3和9，对应这两项的等差数列的数的和是1+2，即3，3下面的27就是3×9的积。——译者注

令 $x=u+v$，那么得到 $(u+v)^2+p(u+v)+q=0$，就是 $u^2+(2v+p)u+v^2+pv+q=0$。

选取 v，使 u 的系数等于零，为此 v 应当等于 $-\frac{p}{2}$。把这个 v 值代入方程中，它的形式为

$$u^2+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{2}+q=0。$$

由此得

$$u=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},$$

因此

$$x=u+v=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}。$$

韦达接近了关于方程的系数与根之间关系的思想，但是他未能完全表达出这个关系。他只承认方程的解中的正根，因此他不能完全认识方程全部的解。但无论如何，他知道了下面方程的解法：

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x=abc,$$

a,b,c 是根。还发现韦达建议用下列方程来检验这个性质。

$$x^3-6x^2+11x-6=0 \text{ 和 } x^3-4x^2-4x+16=0。$$

他提出了任意次幂的代数方程有趣的近似解法，并且深入研究了相当于复数乘法的“三角形的结构”。

在三角学里，韦达根据三角形的三个已知元素作出完整的解法，根据 x 的正弦和余弦的幂，把 $\sin(nx)$ 和 $\cos(nx)$ 表示成展开式，首次作出了余弦的倍角定理。

复兴时期末期——十七世纪初——大工程师和机械师西蒙·斯提文(1548～1620)在荷兰居住和工作。斯提文在静力学和流体静力学方面作出了最有价值的贡献，而且他的数学著作在进一步发展西欧的数学思想方面有着很大的意义。斯提文作为工程师和实践家，非常注意数学的实际计算问题。斯提文在1582年发表了他编的复利计算表。他在数学方面的主要功绩是，深入研究了十进位制小数的理论和建立了它们的写法。我们记得，东方的十进位制小数是阿尔-卡西作出的。但是在斯提文之前的欧洲，人们只是偶尔使用小数。斯提文则完全自觉地使用它们，并认为引进十进位制小数后，对计算带来了相当大的简化。1585年他在小册子《论十进》里，叙述了这些小数的理论。可是斯提文所引进的十进位制小数的符号，对于实际的写法是不完美的，这些小数的现在的写法要合理得多。为了表示十进位制符号，斯提文在每个符号后面加一个圆圈，在圆圈里记上表明小数数位的数字。例如，斯提文把数3.237写成

3 ◯ 2 ① 3 ② 7 ③

在这种写法里，用没有数字的圆圈把整数部分与小数部分隔开。有时候写法还更加简化：即不是把表明数位的符号放在数字之间，而是放在数字的上面，并且不用圆圈。用这种写法，上面的小数可以写成：

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{matrix}$$

斯提文运用自己的符号表示幂的指数。他用圆圈表示未知数，而未知数幂的指数用数字记在圆圈里。我们使用符号x，x^2，x^3，x^4等等，而斯提文所用的符号为

① ② ③ ④

等等。同时对于分数幂，他也使用了这样的符号。

很有意思的是斯提文看到用十进位制小数计算有很大的优越性，他就想到将度量单位的十进位制用于实践中，这项计划在上述著作里他已有所叙述。

对数的发展

十七世纪西欧的数学已经有了相当发展的代数符号，有力地推进三角学的发展和简化某些计算技术。然而对数的发现，完全实施和进入实用，只是在复兴时期的末期，就是在十七世纪初期。

十六世纪广泛地推广了两种方法，它们能在计算时用加法代替比较复杂的乘法运算。其中第一种方法叫做 простафе-ретическим①，它是以如下的三角公式为基础的。

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]。$$

第二种方法是利用代数公式把乘法转化为加法。

$$ab=\frac{1}{4}[(a+b)^2-(a-b)^2]。$$

同时，只有在依靠现成的数的平方表时，第二种方法才比较方便。安东尼奥·马吉尼在 1592 年发表了这种表。

然而在十七世纪，上述繁琐的方法逐渐被新的对数方法所代替。

我们从前面的介绍中已经看到，法国数学家舒开和德国的史提非把等差数列和等比数列加以对比，并得出结论：等比数列的各项相乘，可以简化为用等差数列与它对应项的加法来代替乘法运算，并且等比数列各项的除法、乘方、开方的运算，同样可以分别用

① 这个名称来自希腊文的单词，原意为“加上”和“减去”。

等差数列的与它对应项的减法、乘法和除法来代替。但是无论是舒开还是史提非都不能称为对数的发明者。因为他们没有进一步发展自己的某些设想，深入研究还不够，尚未达到严整的体系。

瑞士的钟表匠伊·彪奇和苏格兰人约翰·纳皮尔是对数的发明人，他们造出了实际应用的对数表，并给出了它的理论根据。

彪奇(1552～1632)不是数学专家。因他曾经是钟表匠和机械师，他必须精通天文仪器的结构，而有时要利用这些仪器结合观察的情况作天文计算。1603 年彪奇被任命为布拉格地方的宫庭钟表匠，他在那里与著名的数学家与天文学家约加·开普勒一起工作。彪奇接触到细心和耐心的天文计算，就产生了需要简化计算的思想。他在著作《等差数列和等比数列表》里，实际上是实现了史提非的思想：他造出了等差数列和等比数列对比的表，可是他自己所挑选的数列更适合运用于实际计算。

彪奇取等差数列的形式为

$$0,\ 10,\ 20,\ \cdots\cdots,\ 10n$$

与之对应的等比数列是

$$10^8,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right),\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^2,\cdots\cdots,\ 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n。$$

因此，等差数列的项 $10n$ 对应等比数列的项 $10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^n$。

现在我们仍然按照彪奇的想法，但是把他的表稍加改动，也就是把上述对比的数列换成另外的数列：

$$0,\ 0.0001,\ 0.0002,\ \cdots\cdots,\ 0.000n$$

$$1,\ 1.0001,\ (1.0001)^2,\ (1.0001)^3,\cdots\cdots$$

在这里，等差数列中的 1 对应于等比数列中的数 $(1.0001)^{10^4}$，就是说，彪奇在造对数表时，把对数的底取为

$$(1.0001)^{10^4}=2.71814593\cdots\cdots$$


约翰·纳皮尔

如果我们想起数 $e=2.718281828\cdots$，那么我们可以看到，彪奇的对数的底与数 e 仅从小数第四位数字开始才有所不同。

开普勒懂得彪奇的对数表对于计算有巨大的意义，开普勒竭力建议彪奇将自己的方法公布于世，但是彪奇拖延了，结果另一位作者的对数表首先出版。彪奇的对数表出版于 1620 年，而在 6 年前(1614 年)约翰·纳皮尔以书名为《奇妙的对数表的说明》发表了他造的对数表。

苏格兰的男爵约翰·纳皮尔(1550～1617)同样不是数学专家。他对各类知识都发生兴趣，但主要研究直接应用于生活的问题。例如，他发明了若干农业机器，以及某些军用仪器。

在数学领域内，纳皮尔主要对计算问题感兴趣，多次找出简化计算的方法。例如在他去世那年出版的《算筹术》里，叙述了自己的仪器，我们现在把这个仪器叫做“纳皮尔计算尺”，是学校里很好的教学法的资料。这种仪器由 10 根小木棍组成，在这些小木棍上载有乘法表。左边的小木棍是固定的，而其他部分可以调换自己的位置。在每一个小方格里作对角线，并且把表中积的个位数字写在方格对角线的下面部分，而积的十位数字写在方格对角线的上面部分。纳皮尔利用这种工具能够进行数的乘法和除法运算，并且用加法代替乘法，用减法代替除法。例如，如果需要把数 684 乘以 4，为此把上面具有数字 6、8、4 的木棍并列放置，然后注意在左边是 4 的这一行里对应数 6、8、4 的各个方格。这些网格表示成下

面的形式：

4	2/4	3/2	1/6

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0/1	0/2	0/3	0/4	0/5	0/6	0/7	0/8	0/9
2	0/2	0/4	0/6	0/8	1/0	1/2	1/4	1/6	1/8
3	0/3	0/6	0/9	1/2	1/5	1/8	2/1	2/4	2/7
4	0/4	0/8	1/2	1/6	2/0	2/4	2/8	3/2	3/6
5	0/5	1/0	1/5	2/0	2/5	2/0	3/5	4/0	4/5
6	0/6	1/2	1/8	2/4	3/0	3/6	4/2	4/8	5/4
7	0/7	1/4	2/1	2/8	3/5	4/2	4/9	5/6	6/3
8	0/8	1/6	2/4	3/2	4/0	4/8	5/6	6/4	7/2
9	0/9	1/8	2/7	3/6	4/5	5/4	6/3	7/2	8/1

纳 皮 尔 计 算 尺

把与正方形对角线平行的数相加，得 2,3 + 4 = 7,1 + 2 = 3,6。因此所求的积等于 2736。

纳皮尔的计算尺为计算作出了相当大的简化，但这比起他造出的对数表来说，只是雕虫小技而已。

纳皮尔还在十六世纪的最后几年里，就深入研究了对数的思想，但是对于彪奇在这个领域内的著作他却一无所知。在有关对

数问题的第一本书《奇妙的对数表的说明》里，纳皮尔造出了对数表，叙述了它的性质，并指出各种计算的实际应用。比这本书出版还要早些的时候，纳皮尔写了另一本书《奇妙的对数表的构造》。在这本书里作出了对数的计算方法的解释，然而在他死后此书才于1619 年出版。

纳皮尔的对数表主要是供计算三角值用的，是根据非常独特的与质点运动有关的设想构造出来的。

纳皮尔经过相当复杂的过程才形成了他的观念，在现在完全可以借助于微分计算和微分方程的积分法来加以阐明。我们力求保持纳皮尔思想的大体上的过程，作出最基本的说明。

假定点 A 和 A' 沿着两条直线轨道运动(图 19)。两个点用很大的速度 v 从开始位置出发。设线段 AB 表示速度 v 的值。纳皮尔假设，点 A 作减速运动，其速度与这个点离 B 点的距离成正比，而点 A' 始终作匀速运动。

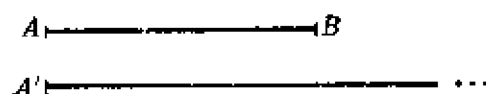


图 19

我们不准备一字不差地叙述纳皮尔的考虑过程，而将认为点 A 这样运动，它的速度在每个新的单位时间间隔开始时与离点 B 剩下的部分路程成正比，在每个小间隔内的时刻 $\Delta t=\frac{1}{v}$ 成为常数。

在我们假定的情况下，在第一个间隔终点的时刻，点 A 在一个时间间隔 Δt 内通过的路程接近 1，而在第二个间隔开始时它的速度等于 $v-1=v\left(1-\frac{1}{v}\right)$。点 A 用这个速度运动，在第二个时间间隔 Δt 内通过的距离等于 $\frac{v-1}{v}$，而离终点 B 的距离还有 $v-1-\frac{v-1}{v}=$ $(v-1)\times\left(1-\frac{1}{v}\right)=v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2$。

通过用类似的方法讨论，我们可以说，在第 k 个间隔末时，从

点A到点B的距离等于 $v\left(1-\frac{1}{v}\right)^k$。同时点$A'$以等速运动，第一个时间间隔内通过的路程等于1，第二个间隔末通过的路程等于2，等等。

我们将每个时间间隔末点A到B的距离与点A'在这段时间内所通过的距离进行对比。实际上，我们是在把下述形式的等比数列与等差数列的项进行对比：

$$v,\ v\left(1-\frac{1}{v}\right)^1, v\left(1-\frac{1}{v}\right)^2, v\left(1-\frac{1}{v}\right)^3, \cdots\cdots, v\left(1-\frac{1}{v}\right)^v, \cdots\cdots$$

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots\cdots,\quad v,\quad \cdots\cdots$$

纳皮尔把等比数列的各个项称为数，而把等差数列的各个项称为对数①。因此，纳皮尔赋予对数概念的意义，还不象我们现在这样，为了得到给定的数，应该把底数作某一乘方，我们就把这个乘方的幂指数叫做该数的对数。原因也很明显，因为纳皮尔那个时候，代数符号没有充分发展，特别是还没有普遍使用幂的指数的书写方法。史提非和斯提文在这方面所作出的试图，还没有得到广泛的运用。就这样纳皮尔的对数的诞生，竟然比底数和幂指数的概念获得普遍使用还要早些。

纳皮尔所建立的对数与我们习惯使用的对数有所不同。例如，当数增大时，它在纳皮尔表里的对数反而减小，只有大于v的数才能按照纳皮尔的表得到负对数。

纳皮尔对数表具有这些特点的主要原因是，他建立这些表多半是为了简化三角计算。在图上AB的距离，纳皮尔表示正弦90°的值，就是半径的值，这个半径通常等于10^7。

纳皮尔作为对数的发明者是有功劳的。他不仅作出了实用的表，而且还仔细深入地研究了对数的理论，并揭露出它的本质。在

① 对数一词本身来源于两个希腊词"λόγος"和"ἀριθμός"。前一个词可以译成"比"，后一个词就是数。因此对数的直译就是"比的数"。

那时，彪奇只提供史提非计算思想的实际应用。

牛津大学教授根里·布里格斯（1561～1630）在与纳皮尔会面时向他提出，把表作某些修改，最好修改成能更便于用通常的数进行计算。布里格斯的思想是改为以 10 为底的常用对数。原来，这个设想与纳皮尔本来的意图完全一致。因此按照布里格斯和纳皮尔的倡议，建立了我们通常的以十为底的对数。

在建立以 10 为底的对数表时，得

0	1	2	3	4	5	……
1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	……

布里格斯与另一位数学家荷兰人阿得里安·佛拉哥（1600～1667）共同完成了非常吃力的工作，造出了 14 位对数表。从 1 到 20000，从 90000 到 100000 是布里格斯自己完成了对数的计算，而从 20000 到 90000 是佛拉哥完成的。为了判断布里格斯与佛拉哥编制表格的工作量庞大到什么程度，我们用一个简单的例子考察这个表是怎样造出来的。

因为以 10 为底时，根据指数为自然数的幂造出的表，只可以给出整数 1，10，100，……的对数，那么对于它们之间的数的对数，应该把这些数的几何平均值（即等比数列的项）与对数的算术平均值（即等差数列的项）相对应。因此，为了求 5 的对数，布里格斯从数 1 和 10 的对数出发大约进行了下列顺序的计算：

数	对　数
$A=1$；	0.00000000000000；
$B=10$；	1.00000000000000；
$C=\sqrt{AB}=3.162277$；	0.50000000000000；
$D=\sqrt{BC}=5.623413$；	0.75000000000000；
$R=\sqrt{CD}=4.216964$；	0.62500000000000；
……	……
5.000000；	0.69897000000000。

为了计算一个 5 的对数就需要作 22 次开方。

布里格斯和佛拉哥造出的表已经付诸普遍使用，它是现在流行最广的对数表，并供中学里学习使用。

然而实践表明，为了研究理论的用字母表示的计算，为了完成利用指数函数关系的科学工作所遇到的计算，采用以 e 为底的对数比较能适合实际需要。这就是所谓自然对数。自然对数的准确的涵义被一位数学家第一次发现，他的名字差一点儿在历史上失去，而他的生平我们无从知道。他的名字只是从一个书名中发现的，在这本书中他发表了自己的对数，书的作者是英国中学的一位数学教师约翰·斯佩杰尔。在1619年他出版了自己的著作，就是比彪奇作出这一点要早一年。

当时，对数由于实用方便，最终从使用中代替了以前存在的加上减去和跟它类似的繁琐方法，计算技术就大大地简化了。值得一提的是，取对数的实践引起了计算结构本身根本的变化：如果以前的方法是力求用加法代替乘法，那么我们在使用对数表时，却相反地力求用积表示和，把表达式化成取对数方便的形式。

在进一步发展对数的历史中，我们应该指出格里戈利·圣-维采特(1584～1667)的作品。他是法兰德斯省布鲁日城出生的人。他把对数的值跟位于等边双曲线和它的渐近线之间的面积相比较。事实上，相对于其渐近线写出等边双曲线的方程，那么真如大家知道的，它有如下的形式：

$$y=\frac{1}{x}。$$

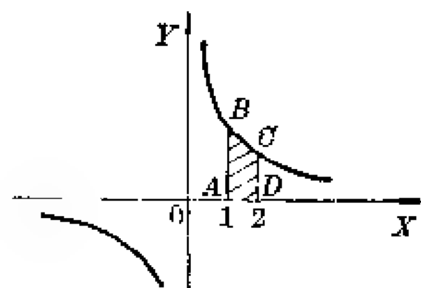


图 20

我们用现在的符号可以写成：

$$S_{ADCB}=\int_1^2\frac{dx}{x}=\ln 2,$$

其中 S_{ADCB} 是所求的面积(图 20)。

根据这个理由，有时把自然对数

也叫做双曲线对数。

维采特的思想使尼科卢斯·麦卡托(约1620～1687)在1668年能够得出把对数分解成级数[①]的思想。

实际上，如果我们把坐标轴作一些位移，但不改变它的方向，那么可以把上面作出的双曲线方程写成：

$$y = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\cdots$$

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\cdots)\,dx$$

$$= \ln(1+x)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots\cdots$$

把对数分解成级数，使得有可能用比布里格斯和佛拉哥简便得多的方法计算对数，从而简化了对数表的编制工作。

对计算技术来说，重新评价对数的意义是很困难的。关于这一点皮埃尔·西蒙·拉普拉斯(1749～1827)说："对数的发明，简化了天文学家的工作，延长了他们的寿命"。

① 牛顿也有这样的思想，但与麦卡托的思想无关。

第四章　建立变量数学的时期

十七世纪数学的发展过程

十五～十六世纪是封建制度消亡和商业资本主义发展的时期。在这一时期中，家庭手工业-手工业作坊生产逐渐地改革成为工场手工业生产。商业资本渴望获得新的市场，便派出船只长途航行。天文学和几何学因而得到了发展。由此出现的精确计算的要求，也促进了对数和三角学的发展。

十七世纪已经出现了某种新的状况：生产中开始出现了最简单的机械，然后逐步运用比较复杂的机器。这样，工业不再采用工场手工业的生产方法，而是转向以使用机器为基础的更完备的形式。生产力的发展也影响到生产关系的发展，产生出工业资本。工业资产阶级开始懂得掌握机械生产的必要性。因此，对数学提出了新的要求。不断发展的技术问题已经不能光靠初等数学来解决。机械的变化引起数学的进展。反映这种进展的新的方法、新科学分支都在产生：代数和几何中的代数方法的发展，无穷小量的理论在分析中逐渐取得稳固的地位。新的方法大大地扩大了数学在研究周围生活现象方面的应用范围，同时随着这些方法的逐步完善，也为现代数学奠定了基础。

同时，在初等数学内部也正在酝酿着一种转折：学者们转向研究数学的基本理论：数论和组合论得到了发展，以组合论为基础建立了数学的新分支——概率论。

在数学中，新思想的第一批代表，还没有能使这些思想具有新的形式，并把它们补充到旧的形式中去。但是这些旧的形式逐渐



巴塞·杰·麦齐里阿克

地被分解，起变化，以致形成新的形式。这样，在科学中发生了根本的转折，这种转折实质上是由生产中的急剧变化所引起的。

数学中的新思想首先在法国得到广泛的传播，然后又传播到西欧其他的国家。我们以前分析过的韦达的著作以及巴塞·杰·麦齐里阿克的活动，就与这个过渡时期有关。然后更明确的新思想则渗透到开普勒、卡瓦列利、费尔马、帕斯卡和许多其他学者的学说中，最后形成了笛卡尔、莱布尼兹和牛顿的严整的科学体系，完成了解析几何和数学分析的理论。

加斯帕尔·巴塞·杰·麦齐里阿克（1587～1638）诞生在法国布尔-安-格列斯城。他曾受过良好的教育，特别是在文学方面，他还学过多门外语，1635 年起，他成为创建不久的法国科学院的一名成员。巴塞还是个不错的诗人，但这没有妨碍他对数学的浓厚兴趣。当时他对数的理论问题最感兴趣。1621 年巴塞出版了拉丁文和希腊文的丢番图的《算术》。巴塞对这些出版物作了仔细的整理，并加了注释。这些书对于提高人们对数的理论的兴趣起了很大的作用。

这些问题也吸引了麦齐里阿克自己。例如他添写了如下的定理：从 4 开始的任何非平方数，可以分解成两个、三个或四个平方的和。这个定理是后来提出的华林问题的一个特殊情况，关于华林问题我们还要讨论。

麦齐里阿克在1612年出版了《以数学为基础的游戏和题目》。

这本书当时非常流行，直到十九世纪还再次重印。在这本著作中，麦齐里阿克收集了各种有趣的题目，其中有许多题目是借用以前的作者的。因为麦齐里阿克是位优秀的数学家，他能选出最有趣的数学题目，并找出它们的各种解法。其中某些题目不需要特别的解法，只要凭技巧就行了。而另一些题目则相反，需要专门的数学手段和方法。该书中还有以整除理论为基础的题目，以不定方程和不定方程组为基础的题目，我们举几个麦齐里阿克的题目如下。

1．有一位贫苦的妇女，拎着一篮蛋去集市出售。有一个人把蛋篮撞落在地，蛋被打碎。肇事者愿意赔偿卖蛋人的损失，并问道：篮里有多少个蛋？妇人忘了有多少蛋，但是她说，当把这些蛋分开放时，按照2个、3个、4个、5个或者6个一堆分放时，总是剩下一个蛋，而按照7个一堆分放时正好放完，没有剩余。这位妇人篮里一共有多少个蛋？

2．有一个人在临死时，要把自己的钱财分给几个儿子，并使第一个儿子得到1个3马克银币和余额的1/7，第二个儿子得到2个3马克银币和余额的1/7，第三个儿子得到3个3马克银币和余额的1/7，等等。结果是，所有的儿子都得到了同等金额的钱财。问，所分钱财的总数是多少？有几个儿子？

3．两个朋友有8公升酒。酒在小桶里，桶的容量正好等于8公升。他们要把这8公升酒分成相等的两份。能用来分酒的两只小桶的容量是，一只5公升，另一只3公升。该怎样分？

4．三个好嫉妒的男子要与他们的妻子一起渡过河去。他们只有一条没有船工的小船，这条小船最多可以乘两个人。要使每个妻子在自己的丈夫不在场时不与另外的一个或两个男子在一起，应该怎样渡法？

第四个题目实际上是我们熟知的阿尔昆著作里的关于狼、山羊、白菜的题目的另一种表达。

在麦齐里阿克的题目中，所谓幻方的题目占有特殊的地位，麦齐里阿克那时的幻方仅是一种数学娱乐。这种幻方是这样的：把一个正方形分成相等的若干个小方格(9个、25个、49个等)，在每个小方格里写上一个从1开始的自然数，并使每一列、每一行、每一条对角线上的各个数的和都相等。这样的排列是相当困难的。需要有特殊的方法，才能把它排列出来。我们举两个幻方的例子如下：

4	3	8
9	5	1
2	7	6

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

因为幻方对解方程组是有用的理论，所以在较晚的时候获得了纯理论的意义。

从十七世纪法国大数学家皮埃尔·费尔马的著作中，可以看出他对数论问题有很大的兴趣。

皮埃尔·费尔马(1601～1665)是皮革商的儿子，学过法律，起初当过律师，后来担任议会顾问，他的职务，就内容来说，与数学的距离很远。但他有充分的空余时间，费尔马就把空余的时间用在自己热爱的事业上，即从事数学研究。由于费尔马具有天赋的才能和研究数学问题时所必须具有的顽强精神，所以他在极不相同的领域内① 都获得了丰硕的成果。

① 费尔马又是物理学家。在物理方面，例如他作出了几何光学的基本原理，即著名的“费尔马原理”。(B.Д.奇斯佳科夫注)

他不仅对原来的各个数学分支添加了新的结论，而且他的工作也促进了数学新分支的发展，如数学分析、解析几何、概率论。应当认为，他是数论这门科学的创始者。



皮埃尔·费尔马

费尔马对幻方问题也相当重视。印度人和阿拉伯人已经知道了这些幻方。中世纪时期幻方也出现在西欧。由于这些幻方的特性，使人们以为它们是有魔力的，于是就把幻方当作能够预防各种疾病的护身符看待。但是数学学者都是从另一方面看待幻方的。他们对幻方的数学结构有兴趣。他们在这方面的研究，促进了某些数学理论的发展。麦齐里阿克就已经找到了构成奇数阶幻方的方法。费尔马则把构成幻方的思想扩充到空间，即组成具有与幻方类似性质的立方体。

费尔马在仔细分析了数的整除性的同时，作出把给定的自然数分解成两个因子的有趣的方法。当需要把一个数分解因子，而对这个数又很难说出它是否能分解时，那么这种方法是有用的。

若要把自然数A分解因子，挑选一个其平方大于A的最小的数a，那么$A=a^2-K$。如果K是平方数，就是说，如果$K=b^2$，那么分解得

$$A=a^2-b^2=(a+b)(a-b)。$$

如果K不是平方数，那么不取a而取$a+1$，就成如下形式：

$$A=(a+1)^2-K_1。$$

如果K_1是平方数，那么用上述方法进行分解。如果K_1不是完全平方数，那么不取a,$a+1$，而顺次取$a+2$,$a+3$等等。例如，

$$589=25^2-36=25^2-6^2=31\cdot 19,$$
$$703=27^2-26=28^2-9^2=37\cdot 19。$$

费尔马在数论中给出了许多有价值的结论。我们仅举其中的几个例子。

例如，他证明形如$4n+1$的任何质数，可以表示成两个平方的和。

最为著名的是"费尔马大定理"和"费尔马小定理"。

费尔马在阅读麦齐里阿克出版的丢番图的《算术》时，所给出的那个结论叫做费尔马大定理。在该书中谈到形如$x^2+y^2=z^2$方程的解法，费尔马在它旁边的空白处写道："然而，一个立方数不可能分解成两个立方数的和，一个四次方的数不能分解成两个四次方的数的和，一般地说，大于2的任意次幂的数都不能分解为两个同次幂数的和。我找到了这个命题的一个真正奇妙的证明，但是书上空白的地方太少，写不下。"费尔马的这个论断现在表达为如下的定理，"当指数n是大于2的整数时，关于x、y、z的方程$x^n+y^n=z^n$在有理数范围内没有解。"这个定理对于很多特殊情况都被证实是正确的。虽然有许多大数学家对这个定理感到兴趣，企图证明它，但是直到现在它的一般形式尚未被证明。1907年，达姆施塔特城（德国）的数学家佛尔夫斯克尔临死时立下遗嘱，把100,000马克交给完整证明这个定理的人。但是直到现在谁也没有领到这笔奖金。

费尔马小定理断言，如果p是质数，数a不能被p整除，那么差$a^{p-1}-1$能被p整除。例如，$2^{7-1}-1$能被7整除，$5^{3-1}-1$能被3整除，等等。

费尔马发展的组合论是他在代数方面的主要贡献。组合论的

某些问题，在古代就由希腊人和印度人解决了。但直到十七世纪，这些问题的科学的论述才出现在费尔马以及他的同代人法国著名的哲学家、数学家和物理学家帕斯卡的著作里。此外，这两位学者根据组合论的原理，为数学的新理论概率论打下了基础。

早在十六世纪就已经有了产生概率论萌芽的那些问题。它们的产生起因于保险计算和赌博。数学家对掷骰子特别有兴趣。例如，塔塔利亚已经知道，在骰子游戏中，投掷骰子的时候，能得到某一点数的多少种不同的组合。费尔马和帕斯卡在其著作中建立的概率论的基本原则即数学期望的概念，在本质上是新的。数学上讲，期望事件的概率，应该是有利于期望事件情况数与所有可能的与等可能的情况数的比。例如，同时掷两颗骰子，出现一共是 7 点的概率等于$\frac{1}{6}$，而在相同的条件下，出现 3 点的概率是$\frac{1}{18}$。

据推测，是下面的问题推动了概率的数学理论的产生。1654 年，帕斯卡的一位叫梅累的朋友，向帕斯卡提出一个使他苦恼很久的问题，有一笔赌金在下列条件下该怎样分才公平：两个玩骰子者下的赌注相等，他们想出一个有条件的游戏，谁先赢满一定的盘数，谁就得到这笔赌金。在某种情况下游戏不可能进行到底，中止的时候第一个游戏者还少一盘，第二个还少两盘。根据帕斯卡的解法，第一个游戏者应该得到赌金的 3/4，而第二个应该得到赌金的 1/4。帕斯卡这样推论：在任何情况下，第一个游戏者有权获得赌金的一半，因为即使第二个游戏者在下一盘获胜，赌金也应当平分；但是第一个游戏者还有权得到 1/4 的赌金，因为对于其余一半的赌金，两个游戏者有同等的权利。帕斯卡把自己的解法交给了费尔马，费尔马利用组合论解这个题，得到了同样的答案。

概率理论在费尔马和帕斯卡奠定了基础之后，便开始迅速地发展起来了。十八世纪它获得了重要的理论基础。这时，概率论开始愈益得到推广，并开始在科学的各个领域和实际工作中得到

应用。它首先用在保险问题上，以后应用的范围越来越广。

费尔马的著作对于发展解析几何有较大的意义。在《平面和立体轨迹研究引论》著作中(该书在费尔马死后，由他的儿子发表)，用十分明确的和详尽完整的叙述，提出借助于几何描述方程的问题。作两条彼此成一定角度的直线，最好是直角。把两直线的交点作为读数的起点，费尔马发现用几何表示方程是方便的。用字母N表示坐标原点，字母A表示横坐标轴，字母E表示纵坐标轴，用字母B、D、g表示常量。他得到通过坐标原点的直线方程、抛物线方程、圆的方程，它们的形式为$D\cdot A=B\cdot E$、$A^2=D\cdot E$、$B^2-A^2=E^2$。

必须指出，费尔马的这些方程的写法与我们现在的写法有很大程度的不同。例如，他用Aq表示A^2，这里q是 quadratum 一词的简写。实际上，费尔马的直线方程写成这样的形式："A乘以D等于E乘以B"，而把椭圆的方程表示成："如果$Bq-Aq$对Eq有给定的比例，那么点J在椭圆上。"这种写法如图所示(图21)。

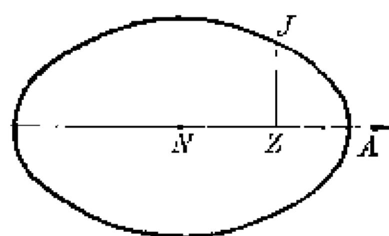


图 21

这样，我们在费尔马的著作里已经找到为了得到表示一定几何轨迹的代数方程所必需的根据，也就是解析几何具有的特征。不过需要指出，费尔马作的图中只取一条轴(横坐标)，在这条轴上标出起点(坐标原点)，从这个点起进行读数，与它类似的纵轴完全没有。对于费尔马平面上的每一个点，除了横轴外，沿着与横轴垂直的方向，或者沿着倾斜的方向计算与横轴的距离，这就是所用的直角或斜角坐标。在费尔马的著作里，没有负数的读数，即没有负的横坐标或者负的纵坐标。虽然圆和椭圆都具有负的横坐标和负的纵坐标的点，然而他还是自如地表示出圆的方程或椭圆的方程，它们的中心在坐标原点，而长轴与横坐标轴重合。费尔马完全正确地认为，

两个未知量[1]的两个方程如果只是常系数不同，那么这两个方程表示相同特征的曲线。

费尔马在解析几何方面的著作，对于发展解析几何这门学科来说，其意义也许并不比解析几何创始人笛卡尔的著作来得小。但是正如上面所指出的那样，费尔马的著作大多数是在他死后，由他的儿子整理和出版的，所以笛卡儿的著作获得了优先发表的地位。

费尔马研究数学分析方面的著作也遭到了同样的命运：在他死后这些著作才成为人类的财富。例如,《求最大值和最小值的方法》和关于双曲线的求积法的著作就属此类。在费尔马的分析著作中，给出了求平面曲线的切线的方法，以及建立某些最简函数的积分法。他求函数极值的方法，用现在的符号可以表示成下面的形式：为求函数 $f(x)$ 的极值，给自变量一个等于 ε 的增量，列出方程 $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}=0$。约去 ε 后，再令 $\varepsilon=0$。所得到的方程给出自变量的一个值，函数在自变量的该一值上具有极值。正如所看到的那样，按照上述顺序进行运算，我们几乎用了极值的现代定义，因为如果 ε 趋近于零，那么方程的左边表示导数，因此我们得到使导数变为零的那个自变量的值。

费尔马用自己的方法处理了许多几何题目，例如，求球的内接圆锥的最大体积，球的内接圆柱的最大表面积以及曲线的切线作法问题。切线作法的一般要点可以表示成下面的形式：我们采用现代的符号，作函数 $y=f(x)$ 的图象表示给定的曲线（图 22）。如果需要通过这条曲线上的点 M 作切线，那么先作割线 TMK，T 是这条割线与

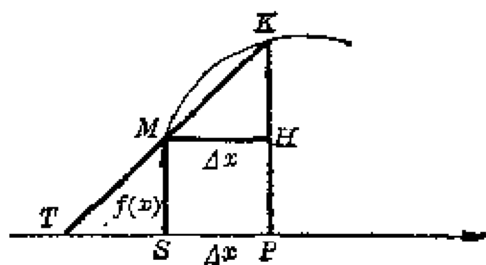


图 22

[1] 在费尔马那个时候，"变量"的术语还不存在，而用"未知量"这个术语来代替。

横坐标轴的交点。然后作横坐标轴的垂线 MS 和 KP，过点 M 作平行于横坐标轴的直线，与直线 KP 相交于点 H。

由相似三角形 MTS 和 KMH 得

$$TS:MS=MH:KH。$$

由此得

$$TS=\frac{MS\cdot MH}{KH},$$

或者

$$TS=\frac{f(x)\cdot\Delta x}{f(x+\Delta x)-f(x)}。$$

如果 Δx 趋近于零，那么在极限情形下 TS 成为次切线，并等于 $\frac{f(x)}{f'(x)}$。有了点 M，知道了次切线，就很容易作出切线。

我们看到，费尔马在解类似的题目时用了三角形 KMH，自变量的增量和函数的增量是该三角形的两条直角边。这个三角形对于发展数学分析具有较大的意义。与费尔马同时代的另外一些人，例如帕斯卡也用了这种三角形。再晚些时候，莱布尼兹把它叫做特征三角形。

费尔马在解求函数的极值和作切线的题目的同时，紧接着又开始研究了以后成为微分学基本课题的那些问题。但是费尔马会解的数学分析问题，并不以这些为限。在解平面曲线求积的几何问题(即求以平面曲线为界的图形的面积)时，费尔马建立了一些很接近积分学的方法。

例如，对于形如 $x^p=y^q$ 的抛物线，费尔马把函数 $y=x^{\frac{p}{q}}$ 图象中包含在纵坐标轴和横坐标轴之间的面积划分成若干条带形，就象我们在求积分时所作的一样，但是他是根据一定规则划分这些带形的：作一些点的纵坐标，这些点的横坐标分别等于 x, ax, a^2x, a^3x 等等，并且认为 a 小于 1。于是点的横坐标逐渐减小并趋近于 0。

带形宽度的值分别为：

$$(1-a)x, a(1-a)x, a^2(1-a)x, a^3(1-a)x, \cdots\cdots$$

对应的纵坐标为 $x^{\frac{p}{q}}$，$a^{\frac{p}{q}}x^{\frac{p}{q}}$，$a^{\frac{2p}{q}}x^{\frac{p}{q}}$，$a^{\frac{3p}{q}}x^{\frac{p}{q}}$等等。如果用许多个矩形（它的高是纵坐标，而底是上述带形之间的距离）来代替那些带形，并将这些矩形的面积相加，则得到该面积的近似值。当在表示无穷递减级数各项之和的那个和中，令 $a=1$，那么就求得位于横坐标 O、x 相对应的纵坐标之间这一图形面积的真值，这相当于计算积分 $\int_0^x x^{\frac{p}{q}}dx$。

费尔马把自己的方法变形，能够得到形如 $\int_x^\infty \frac{dx}{x^m}$ 的积分。因此他求得的已经不是求抛物线的面积，而是求双曲线的面积。

上述例子说明，费尔马掌握了分析的主要方法，但是他的方法是烦琐的：他没有能作出更简单的计算方法，以及与之相适应的适合于现代微积分的方法的简化符号。

费尔马把自己发明的方法应用到自然现象上，提出了所谓的"最小作用原理"。根据这个原理，大自然使各种现象的发生都只消耗最低限度的能量。古代海伦也提出过类似的想法。他认为，光的反射就是根据这个原理发生的（图 23）：从点 A 出发由镜面反射出来的光线，沿着最短的折线 AOB 到达点 B。任何另外的折线（AO_1B，AO_2B 等）都比折线 AOB 长。

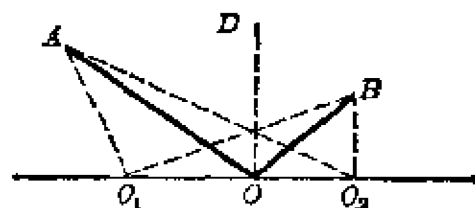


图 23

费尔马根据最小作用原理说明蜂窝眼的形式，在消耗蜂蜡的方面它比任何另外的形式更加合理。费尔马在说明光从一种介质转向另一种介质的折射定律时，最出色地运用了最小作用原理。费尔马根据这个原理判明，介质的总阻力，由光线发出和进入的这两种介质的阻力所组成。当光速在这两种介质中与入射角和折射角



列涅·笛卡儿

的正弦成正比时，介质的总阻力最小。费尔马表达的最小作用原理完全是形而上学的，但是因为它说明了许多自然界中的现象，所以这个原理不仅在十七世纪，而且在十八世纪被许多学者公认，并用于实践。形而上学的特征一直保持到用更合理的力学原理代替它为止。这些力学原理是在十八世纪，根据拉格朗日的力学著作形成的。

笛卡儿的著作与费尔马和帕斯卡的著作很相似。

列涅·笛卡儿(1596～1650)是法国伟大的哲学家、物理学家、数学家和生理学家，他出身于古老的贵族家庭。他在法国一所最好的学校里受过教育——在 La Flèche（拉夫雷士的耶稣会学校）——他还博览群书。笛卡儿自述："别人学的，我都学了。我并不以此而满足。那些被认为是最奇怪、最不寻常的有关各种学科的书，凡是我能搞到的，我都把它们读完。"然而书本上的智慧还不能使笛卡儿满足，于是他决定最好是与"世界书"打交道，也就是去了解大自然和人的生活。据他说，为此"我把自己余下的青春用在旅途上。我研究宫庭和军队里的人。我和各种不同社会地位、不同性格的人交往。我又收集各种经验，并在命运安排的各种境遇中考验我自己。凡我所体会到的一切我都详细研究，目的是从中引出有益的东西。"

笛卡儿在军队服役期间，参加过许多的战役，其中包括三十年战争①。军队的远征使他有了旅游的习惯，他一生中都保持着这

① 三十年战争是指 1618～1648 年在欧洲以德意志为主要战场的国际性战争。——译者注

种习惯。

笛卡儿自己的科学著作大部分是居住在荷兰时写的。1649 年应瑞典女王克利斯提娜的邀请，他移居斯德哥尔摩，那里为他的科学工作提供了非常好的条件。但是寒冷的气候，对笛卡儿衰弱的身体不利，因此 1650 年他就因患肺炎而去世。

笛卡儿对哲学问题和数学特别有兴趣，他对这两门学科有渊博的学问。这些使他能够创立自己的哲学。这种哲学受到不少人的拥护。因为他的哲学是以两种相互矛盾的原理——唯心主义和唯物主义——为基础的，所以它是二元论的。这种二元论表现在：一方面详细研究阐发精神实体、上帝和存在灵魂学说的唯心主义形而上学；另一方面，笛卡儿的所有物理、数学、生理学的著作又带有唯物主义的性质。笛卡儿把物质的学说作为他学术观点的基础，同时他的唯物主义是机械唯物主义。笛卡儿认为物质的主要特性是它的可动性和可分性。笛卡儿在自己的唯物主义著作中，反对封建主义的烦琐宗教学说，他以理智对抗这种学说。因此，笛卡儿的哲学在哲学思想发展史上获得了“唯理论”[①]这个名称。

笛卡儿承认数学是一门“次序和度量”的科学。他认为数学比其他科学更符合理性的要求。因此，他对数学很感兴趣，他在数学方面的著作对数学进一步发展的整个过程具有特殊意义，这是不奇怪的。

笛卡儿把物质运动的概念作为自己科学的哲学基础后，他把运动也带进了数学。如果在笛卡儿之前，使用常量的数学带有形而上学的性质，那么随着笛卡儿著作的产生，在数学和其他自然科学里就有了辩证法。

“数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学。”[②]数学本身因有了变数，就进

① 唯理论来自拉丁文ratio(智慧，理智)。

② 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版第 236 页。

入了辩证法的领域，其标志就是辩证哲学家笛卡儿在数学方面作出的这种进步。

数学中的转折主要是由笛卡儿的数学著作《几何学》引起的。这部著作一出现，运动就进入了数学，同时把变量引入数学，这就改变了数学的性质。在这个转折以前，数学中占统治地位的是常量。这就相当于辩证法攻入了科学，代替了占优势的形而上学。

笛卡儿在1637年匿名发表了《方法论》一书。《几何学》仅仅是该书中的一部分。

笛卡儿的方法论是由下列四个法则构成的。

1. 只有明显地被看出是真的东西，才能当作是真的。换句话说，作科学研究应该不匆忙和不带结论性的偏见。而且明晰和清楚应该是第一位的。

2. 为了更好地解决研究中的每一个困难，需要把困难分成几个小的难点。

3. 研究通常应该从最简单和最容易认识的事物开始，依次进行，象沿着台阶一样逐渐地上升，直到认识最复杂的事物和现象为止。甚至在彼此不密切连接的事物和现象中，也认为可能有次序。

4. 对事实、发现、假设、方法，总是作出足够详尽的目录并审查推理的步骤，使之确信无所遗漏。

在《几何学》里，笛卡儿给出了字母符号的代数和解析几何的原理，那就是通过引进坐标系，使得能用方程表示几何形状和解析的依赖关系的方法。我们知道这个方法早些时候就被应用了。例如费尔马曾大大地发展了这个方法。然而笛卡儿使这个方法具有更巨大的意义，因为借助这个方法，笛卡儿能够改变进一步发展数学研究的总的方向。在笛卡儿之前，从古代起在数学中起优势作用的是几何学，连代数概念和公式通常也用几何形式表示。就连那些对于代数符号作出重要改进的学者（例如韦达），情况也同样如

此。但是笛卡儿在提出用几何形状表示解析式时，把数学引向另一种途径，这就是使代数获得更重大的意义。这也就是笛卡儿在他的《几何学》以及其他著作中（其中他给朋友的书信占大量篇幅）对代数非常注意的原因。并且他又建立起新的符号体系。因此，笛卡儿的著作对发展代数具有很大的意义。无论在基本方法上，还是在符号体系上，代数之所以具有现在所固有的形式，全亏笛卡儿。

笛卡儿的《几何学》，就其叙述的特点，对他同时代的大多数人来说，是不够通俗的。困难在于，读者必须搞清楚新的代数符号，必须掌握那些叙述得十分简洁的新的思想。实质上，在《几何学》里亦没有严格地、系统地叙述解析几何，而是比较快地引进一些思想。要弄清这些思想必须花费相当的劳动。这是笛卡儿所固有的叙述方法。笛卡儿具有独创的才能，他自己不喜欢读带有详细解释的科学论文。而是把书拿来后，先弄清作者的主要意图，他只读完开头的部分，而那些应由作者得出的结论，他总是力求自己得出。笛卡儿读书的主要兴趣也就在这里。笛卡儿认为这种方法是所有的读者容易了解的，所以他自己的著作就阐述得很简洁。

例如，笛卡儿在《几何学》开头部分的某一页上写道："我不准备比较详细地叙述，因为那样会使你们失去独立分析的愉快，会使你们的头脑失去在进行这种练习时所得到的好处。这种好处，依我看，是能从这门科学中吸取到的主要的好处。"

在《几何学》的开头，笛卡儿就建立起算术运算与几何关系之间的联系。为此，他把这两种关系作这样的对比："就象算术仅由四种或者五种运算，即加法、减法、乘法、除法、开方（开方可以看作是除法的一种类型）组成一样，在几何中为了求一些未知的线段，只需要在这些线上加上或者减去另外一些线段。或者相类似的，为了便于把一条线段与数建立起更密切的关系，我给这条线段规定一个单位（长度），这个单位通常是可以任意选取的。另外还有两条

线段，要求第四条线段与这两条中的一条线段之比，等于另一条线段与单位线段之比，这就是乘法；或者求第四条线段，它与两条中的一条之比，等于单位线段与另一条线段之比，这就是除法。最后，在单位线段与另外一条线段之间插入一个、二个或几个比例中项，这就是开平方或者开立方等。”

笛卡儿的这些想法有助于他用简单的分析表达或代替复杂的几何关系。但是要能更容易地运用这些分析表达式，就应该整理代数符号，并且比较严格地为代数方程解法的理论提出根据。笛卡儿在《几何学》里非常注意代数问题，其原因就在这里。他在这部著作中使用的符号与现代的符号非常接近。笛卡儿用字母表中最后的字母(x,y,z)表示未知数，而用开头的字母 (a,b,c) 表示已知数。从笛卡儿那时起，指数幂的写法与我们现在所写的一样。笛卡儿自如地给进入方程的量加上正号和负号，写出他的方程。并且在写方程时，他通常使方程的右边成为零，而把其余各项都移到方程的左边。我们现在通常用两条相等的平行线段表示的等号，在笛卡儿那时已经存在，它是由伦敦的医生、数学家洛毕达·列科尔德(1510～1558)引入的，然而笛卡儿却用λ作为等号。

在笛卡儿的《几何学》里我们看到所谓的代数“基本”定理。虽然这个定理在这以前就由洛林人阿里伯·基拉德(1595～1632)建立了，大概笛卡儿不了解基拉德的发明，而是独立地得出了自己的结论。他的结论是：任何方程的根的个数，等于方程的幂的次数。同时，笛卡儿承认，在这些根中某些可能是“假的”（把负根称为假的），或者是“想象的”（即虚的）。但是在笛卡儿的著作里没有这个定理的证明。

笛卡儿求方程的正根与负根个数的方法，给方程理论作出很大的贡献。这个方法表达为“符号法则”。按照这个法则，方程正根的个数（如果全都是实根）等于方程各项相对于前一项的变号次数，而负根的个数等于方程各项相对于前一项保持符号不变的次

数。例如方程

$$x^3-3x^2+3x-1=0$$

有三个正根，而方程

$$x^3+2x^2-x-2=0$$

有一个正根，两个负根。

在笛卡儿的《几何学》里，还有他自己建立的重要的待定系数法。这个方法是，如果两个恒等的多项式，当未知数的幂的次数相同时，它们的系数应该恒等。笛卡儿自己运用这个方法解了许多几何题目。以后数学中的许多问题都采用这个方法。

因此，笛卡儿的《几何学》不仅对几何的发展有重要的贡献，而且它也促进了代数的进一步的改进。

至于几何学本身，笛卡儿作出的坐标方法，使他有可能用分析的方法去解决一系列复杂的几何问题，并进而从数学学科中分出一个独立分支，后来牛顿把这个分支叫做解析几何。笛卡儿为这门学科除了引进坐标方法外，还建立了曲线方程的原理，解决了作曲线的法线问题，因而，解决了作切线的问题。但是笛卡儿一点也没有谈到确定空间点的位置问题。

综上所述，笛卡儿赋予数学很重要的意义。数学应该是任何别的科学的典范。他就是以这个信念作为他的出发点的。因为数学所有的结论都具有逻辑上的必然性和完全的可靠性。所以，按照他的观点，在自己的理论中，只有那种以数学为模型的科学，才能认为是正确的。然而在证明这种思想正确性的论据中，笛卡儿犯了个大错误。因为他认为数学引用的东西，其实质是我们理性的纯粹构造，而不是人从现实生活中汲取的经验经过再加工的结果。我们完全可以清楚和明确地料想到，他的这种唯心主义的观点，是立足于这样一种假定，即认为不要求实践检验和符合客观事



布莱兹·帕斯卡

实。对笛卡儿来说，数学思想是这样可靠的真理，它们不是从经验中得到的，而是来自人类理性的活动。笛卡儿把这些真理称为先天的，以区别于由经验得到的真理。这样，就象已经指出的那样，这位天才的学者把辩证法引入数学和自然科学，推动了变量学说的发展，为无穷小量数学分析的根据创造了先决条件，同时他也不可能克服某些唯心主义观念，这些观念和他在大多数的学术著作中发展的唯物主义观念是完全矛盾的。

法国伟大的数学家、物理学家、哲学家布莱兹·帕斯卡是费尔马和笛卡儿的同代人。

布莱兹·帕斯卡(1623～1662)出生于克勒蒙腓朗城。他的父亲爱田·帕斯卡是法院院长。妻子死后，他迁居巴黎。在巴黎他致力于数学物理的研究，并在这两门学科中取得了重要的成就。E.帕斯卡对物理数学的兴趣很早就传给了他的儿子B.帕斯卡。他从童年起就因在数理方面具有特殊的才能而成绩卓著。根据某些同时代人的证明，5岁时的B.帕斯卡还不知道几何，但是已经会独立地解三角形内角和的问题了。大约在10岁时他就写出了一部关于声的著作。他观察一只发声的玻璃杯，假如用手指碰一下的话，它就不再有声音了。写书的念头就是在看到这种现象时产生的。

很难说出上述材料的可靠程度。但是他16岁时就写出了很有价值的圆锥曲线论的著作，这是很出名的。这部著作曾得到那时的大数学家笛卡儿和笛沙格的高度评价。这部著作只出版了一部分，

名为《试论圆锥曲线》(1640)。

帕斯卡 20 岁发明了能进行数的加法与减法累计的计算器。讲到这一点，需要强调指出，这位年轻学者发明计算器的动机是希望减轻财务工作者的繁重劳动。

B.帕斯卡的父亲对儿子的特殊才能和顽强的工作感到十分惊慌不安，甚至企图干涉儿子对科学日益增长的爱好，因为父亲担心这种爱好会影响儿子的健康。但是当父亲确信这种爱好不是偶然的，而且他已经完全醉心于这种爱好时，父亲不得不允许儿子献身于他所喜爱的事业。

果然，紧张的劳动损害了 B·帕斯卡的健康。他衰弱的身体经受不住紧张的脑力劳动，因此在 39 岁时帕斯卡就去世了。

帕斯卡在学术上留下了丰富的遗产。内容涉及数学、物理学和哲学。

帕斯卡对摆线的研究工作和他运用几何积分法求面积、体积、表面积的方法，无疑地有助于数学分析方法进一步的发展。在《A·杰托维亚论自己某些几何发现的信件》(1659)这本著作中，帕斯卡叙述了他给出的积分法的那些主要思想。帕斯卡在这本著作里叙述了三角函数的积分法，还引入"特征三角形"的概念。关于特征三角形我们在介绍费尔马的著作时已经谈到过。

还在少年时代，在年长的同代人、法国数学家热拉德·笛沙格作品的影响下，帕斯卡对射影几何发生了兴趣。在我们已经谈到过的著作《试论圆锥曲线》里，他叙述了一条著名的定理。这个定理以"帕斯卡定理"或者"帕斯卡六边形"的名称载入史册。这个定理的内容为："任何内接于圆锥曲线(圆、椭圆、双曲线或抛物线)的六边形，三组对边(或它们的延长线)的交点在一直线上。"

图 24a 表示圆内接六边形，图 24b 表示抛物线内接六边形。

论文《数的整除性的特征》，在帕斯卡死后才出版。论文的内容为数的整除性的一般特征，该特征的基础为数的各个数字的和。整

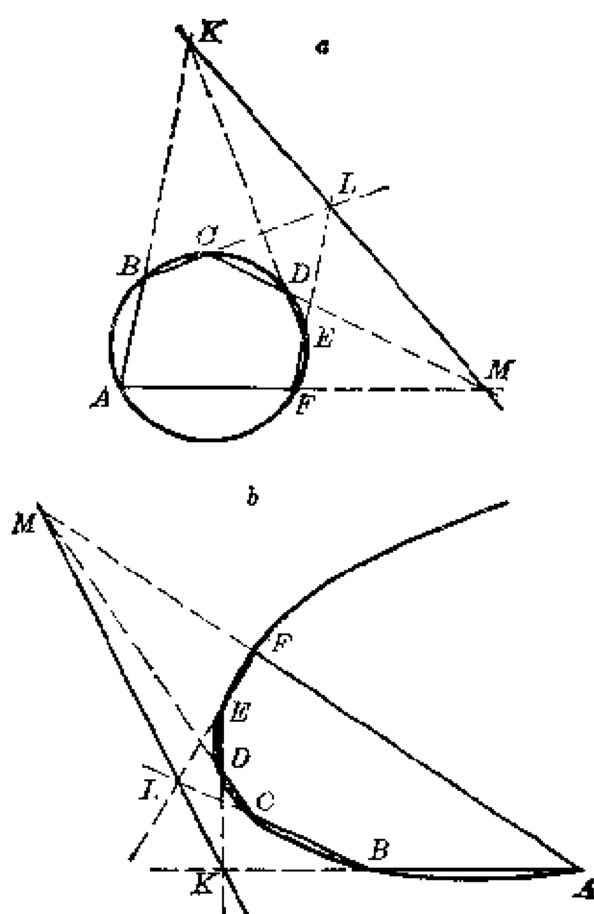


图 24

除性的特征的实质可概括如下：如果有 n 位数 $A=\overline{a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n}$，其中 a_i 是数 A 的数字。如果需要将 A 除以 B，那么依次作如下的运算：10 除以 B，如果得到余数 r_1，那么再以 $10r_1$ 除以 B，用 r_2 表示新的余数，再以 $10r_2$ 除以 B；这样一直继续到得出余数 r_{n-1} 时为止。这时如果 $a_n+a_{n-1}r_1+a_{n-2}r_2+\cdots\cdots+a_1r_{n-1}$ 能被 B 整除，那么 A 能被 B 整除。

帕斯卡在《论算术三角形》里(也是在帕斯卡死后，在 1665 年出版的)，建立了概率论的基本原理和有关组合论的某些定理。

算术三角形就是按特殊规则由数组成的三角形①。实际上，早

① 我国南宋时候的数学家杨辉在公元 1261 年著了一本叫做《详解九章算法》的书，里面载有一张叫做"开方作法本源"的图（杨辉三角形），并且说这个方法是出于《释锁算书》，贾宪曾经用过它。帕斯卡在 1653 年才开始使用这种三角形。因此杨辉三角形的发现，在我国比在欧洲至少要早 300 年光景。——译者注

在十六世纪 M. 史提非分解自然数幂的二项式时，就是用与算术三角形相同的表确定系数的。这个三角形可用图表示为：

C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	23	56	70	56	23	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

这里作出的是这个三角形的前 10 行，但是它们的行数可以无限增多。

C 列给出从 0 开始的行的序号。往后每一列自上而下都是从 1 开始，并且这个开始处的 1 所在位置的列号与行号相同，即第二列里的 1 处在第二行，第三列里的 1 处在第三行，第 k 列里的 1 处在第 k 行。帕斯卡组成三角形的基本法则，跟史提非组成数表的法则是一样的。

我们现在用符号 $a_{p,q}$ 表示三角形的数，其中 p 是行的号码，q 是列的号码；则 $a_{4,3}$ 表示数 4，而 $a_{4,2}$ 表示数 6 等等。因此，组成算术三角形的法则可以用公式表示成 $a_{p,q}=a_{p-1,q}+a_{p-1,q-1}$。例如 $a_{4,3}=a_{3,3}+a_{3,2}$，或者 $4=1+3$。$a_{7,5}=a_{6,5}+a_{6,4}$，或者 $21=6+15$，等等。

帕斯卡的算术三角形具有一系列有趣的性质，它们在计算二

项式系数和研究组合的性质时有很大作用。事实上不难证明，从 p 个元素中取 q 个元素的组合数（我们把它表示成 C_p^q）等于 $a_{p,q}$，也就是 $C_p^q=a_{p,q}$。因为二项展开式的系数可用组合数表示，所以有可能一下子就求出二项展开式的系数。

例如，二项式 $(a+b)^9$，如果要求它的展开式第 6 项的系数，那么应该求三角形的 $a_{9,5}=C_9^5=126$。$(a+b)^7$ 的展开式第 5 项的系数为 $C_7^4=a_{7,4}=35$，等等。

帕斯卡的三角形还具有下列的性质：

1. 算术三角形里任何一个数，等于该数前一列中排列在它上面的各数的和。例如，$20=10+6+3+1$。

2. 算术三角形里的任何一个数，等于沿下降对角线排列并于该数上面截止的所有数的和。例如，$56=21+15+10+6+3+1$。

3. 把上升的各条对角线上的数相加，所得到的数组成斐波那契级数。例如

$$1+0=1,$$
$$1+0=1,$$
$$1+1=2,$$
$$1+2=3,$$
$$1+3+1=5,$$
$$1+4+3=8,$$
$$1+5+6+1=13,$$
$$1+6+10+4=21,\text{等等。}$$

4. 在算术三角形的每一行里，离两端等距离的项相等。

5. 算术三角形任何一行中各数的和，等于上面一行中各数和的两倍。

算术三角形的性质容易推广到组合的性质。例如，构成三角形各元素的规则本身，就表示组合有如下的性质：

$$C_p^q = C_{p-1}^q + C_{p-1}^{q-1},$$

这就是我们知道的组合论的一般公式。

帕斯卡三角形的性质 5 给出如下的推论：

$$C_p^0 + C_p^1 + C_p^2 + \cdots\cdots + C_p^p = 2^p。$$

在初等代数里，计算二项式的所有系数的和时遇到这个推论。

在给费尔马的信里和在《算术三角形》里，帕斯卡常常运用数学归纳法，这本身也就是介绍了数学证明中这一极有价值的方法。

帕斯卡的著作《几何的特性》对于几何的哲学根据有特殊的意义。他在这部著作里阐明了定义和公理的意义，要求定义和公理具有准确性和严格的界限。他认为，数学已经遵循了这些要求，还应该把这些要求非常严格地推广到其他学科和人类思维的领域中去。

研究麦齐里阿克、费尔马、笛卡儿、帕斯卡的工作时，我们了解了十七世纪上半叶数学在法国的发展情况。我们看到，上面提到的那些数学家，为完善初等数学的思想做了大量的工作，他们是数学新思想的建设者，是数学新分支的创始人，他们的工作为确立无穷小量分析方法准备了基础。

但是不应该认为，数学新思想仅仅是法国数学家思维的成果。西欧各国类似的社会经济条件使思想界产生类似的愿望。因此，在欧洲其他的国家里，数学分析的思想也在发展。著名的天文学家、数学家开普勒是该时代德国、奥地利和捷克在这方面的杰出代表。

约加恩·开普勒（1571～1630）出生在符腾堡的费尔-杰尔-斯塔德特城，从小时候在修道院学校学习时起，他就懂得了天文学，之后天文学就成为他最热爱的一门科学。他不是在祖国，而是在奥地利开始自己的学术活动的。在奥地利，他最初在格拉茨得到数学和道德教授的职务，尔后应著名天文学家第谷·布拉赫（1546～



约加恩·开普勒

1601)的邀请迁到布拉格，他在那里作为第谷的助手在天文台工作。在第谷死后，开普勒主持了天文台的工作。开普勒把第谷收集的大量天文观测的实际资料补充到自己的著作里。这些资料帮助开普勒作出天体运动问题的一系列重要结论。这些重要结论，开普勒以行星运动的规律予以发表，并以同样的形式载入了科学。开普勒在天文学上是哥白尼的信徒。他确信，不是太阳环绕地球运动，而是地球环绕太阳运动。

当开普勒已经成为有名的学者时，牧师宣称他的母亲是巫婆，并对她进行卑鄙的审判。这些使他遭受到沉重的灾难。当开普勒在世的时候，梵蒂冈宣布开普勒的天文学著作是“反宗教的”，并把它列入禁书。

开普勒在研究天体运动问题时，不知不觉中遇到了类似于无穷小量那样的一些概念。他之所以能这样熟练地运用这些概念，实际上他是建立了运用这些概念的一种特殊方法，这种方法类似于积分学。在他的数学著作《酒桶的新立体几何》中，这种方法得到了发展。

开普勒所用方法的要点是，在求线段的长度、平面图形的面积、物体的体积时，他把被测量的量分成很多非常小的部分，然后利用一些几何论证求这些小部分的和。这种方法其实不是别的，就是积分法。诚然，开普勒没有提出“无穷小量”的术语。但是，例如在量线的长度时，他提出线是由点组成的，在他的推论里，相当于

把一条弧分成无限小的元素，即线段。

开普勒在《立体几何》里叙述自己的理论时认为，他是仿效在阿基米德著作中得到发展的穷竭法。但是必须承认，开普勒的方法与阿基米德所使用的方法有很大的不同，在发展使用无穷小量的方法上，开普勒的方法向前跨出了创造性的一步。

开普勒在求圆的面积时，他把圆分成了许多相等的扇形。当扇形的个数较多时，可以认为这些扇形接近等腰三角形，三角形的高是圆的半径，底是所给扇形的弧。因此，圆的面积可以看成是各个扇形面积的和，并且各个扇形底边的和是圆的周长，所以得到圆的面积等于 $2\pi r\cdot\frac{1}{2}r=\pi r^2$。事实上，因为每个三角形的底边是扇形的弧，高是圆的半径，每个扇形的面积不可能等于三角形的面积，因此开普勒作了这样的修正，应当认为扇形的个数是无限的，那时候扇形的底边变成一个点。在这种情况下，开普勒没有注意到，用这样的说明时，扇形变成了半径，因而圆的面积将可以看作是无限条半径的无限的和。这样的方法很快地作为使用德谟克利特方法的例证，而不是阿基米德的方法。因为这种方法是以这种假设为基础的，即圆是由不可分割的原子即点组成的。

开普勒还利用自己的方法求球的体积，然后把这种方法推广到求各种各样的旋转体的体积。开普勒求的旋转体多达 92 种。

我们引用开普勒求圆环和"苹果"的体积作为他推论的例子。

大家知道，一个圆绕圆平面上且在圆外的一条轴旋转一周所形成的物体叫做圆环。

开普勒用无数个通过旋转轴的平面，把圆环截成许多很小的部分，如图 25a 所示。由圆环截出的这些部分都是弯曲的圆

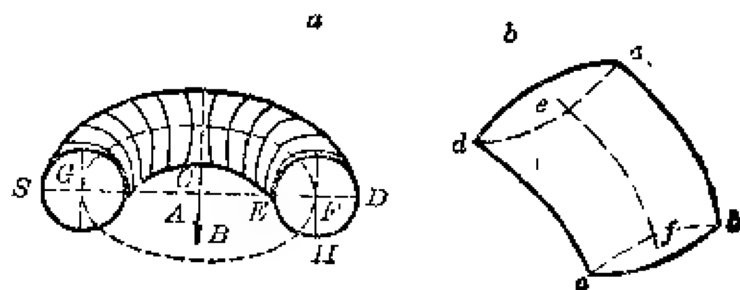


图 25

柱体，它们的底就是用以旋转的圆；这种圆柱的形状如图 25b。

开普勒把每一个弯圆柱"弄直"，也就是用原弯圆柱体的底和等于弧 ef 长度的高，作成一个直的圆柱体（弧 ef 是弧 ab 和 cd 长的算术平均）。这样构成的圆柱，开普勒认为与原来的弯曲圆柱体是等积的。把从圆环中所截出的每一份都弄直并叠起来，就得到一个圆柱。这个圆柱的底是构成圆环的圆，它的高是以半径 AD 和半径 AE 的和的一半为半径的圆的周长。AD 与 AE 分别为旋转圆上离旋转中心最远的和最近的点旋转而得的圆的半径。

如果用 r 表示旋转圆的半径，用 R_1 表示半径 AD，用 R_2 表示半径 AE，那么圆环的体积 V 表示成：

$$V=\pi r^2\cdot 2\pi\cdot\frac{R_1+R_2}{2}=\pi^2 r^2(R_1+R_2)$$

又若用 d 表示从旋转中心到旋转圆中心的距离，那么体积 V 还可以简化为

$$V=\pi^2 r^2 d。$$

当旋转轴在旋转圆的内部时，开普勒把圆环的这一特殊情况叫做"苹果"。换言之，由圆的（比半圆大的）弓形绕它的弦旋转所得到的旋转体就是"苹果"。同样，如果由比半圆小的弓形绕相同的弦旋转，那么得到的旋转体，开普勒把它叫做"柠檬"。

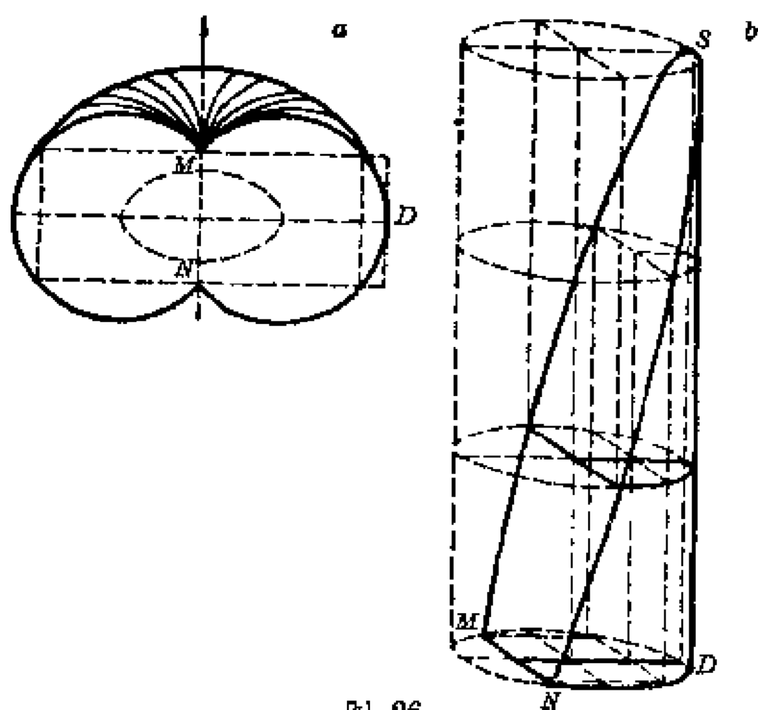


图 26

图 26a 表示"苹果"的断面。开普勒求出这种"苹果"的体

积，等于用平面从圆柱中截出的楔形的体积。如图 26b 所示。这个圆柱的底面等于形成“苹果”的旋转弓形所在的圆。截面经过作为转轴的弦和圆柱母线上的点 S，且线段 DS 的长等于点 D 绕弦旋转描出的圆周长。

开普勒在极度的贫苦中死去，在他的坟上刻着他自己作的墓志铭：

我曾观测苍穹，
今又度量大地，
灵魂遨游太空，
身躯化作尘泥。

就在开普勒创作自己的天文学著作和几何积分先驱工作的同时，一个大几何学家的新思想在意大利获得很大的荣誉，伟大的天文学家、机械工程师、物理学家伽利来·伽利略[①] (1564～1642)认为他是当时最卓越的数学家之一。他的才能不亚于阿基米德，这位几何学家就是伽利略的学生鲍纳弗图拉·卡瓦列利。



鲍纳弗图拉·卡瓦列利

鲍纳弗图拉·卡瓦列利(1598～1647)出身于米兰的贵族家庭。他有机会受到各方面在当时说来是出色的教育。

卡瓦列利从少年时起就对数学发生兴趣。看来他是

① 必须指出，哥白尼的追随者伽利略是宗教裁判所的终身的囚徒（总是处在宗教裁判所的监视之下）。作为数学家、机械工程师的 G. 伽利略写了《力学》《球的知识指南》《利用圆规反演》等等。（B. Д. 奇斯佳科夫注）

在伽利略的影响下，在几何学中建立起他自己的方法，即不可分原理。这个原理在他的主要著作中得到了发展。这部著作叫做《连续不可分几何》(1635)。

卡瓦列利认为，在平面图形内所作的平行弦和包含在物体内部的平行平面，都是"不可分的"。为了把平面图形之间和物体的体积之间作比较，他引入了"全体不可分的和"的概念，这些不可分的元素充满着已知平面或空间图形。卡瓦列利把这些"和"的比作为面积与体积的比。他仔细研究了位于两条平行直线之间的平面图形。

例如，假定在两平行直线AB和CD之间有两个图形，一个是三角形LMN，另一个是曲线图形$L_1M_1N_1$(图27)。如果与直线AB、CD平行的割线，例如EF、GH等截图形LMN和$L_1M_1N_1$得到相等的弦ef、e_1f_1和gh、g_1h_1等，那么认为包含在两个图形内的平行线段的和的比是1，这两个图形的面积也彼此相等。如果各处的线段的比等于$m:n$，那么图形面积的比也相同。

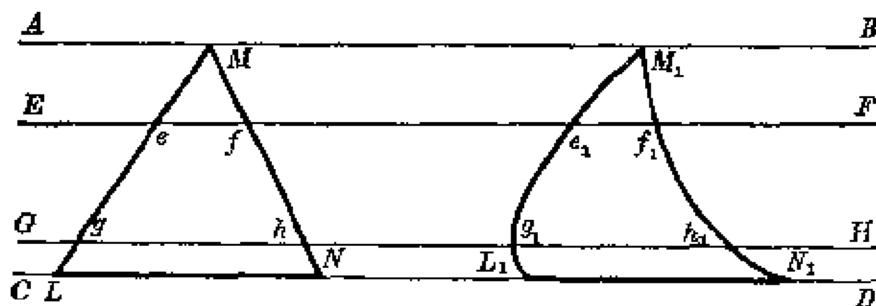


图 27

卡瓦列利还类似地提出了包含在平行平面之间的物体的问题。在这种情况下，为了比较这些物体的体积需要作割平面，于是得到截面面积和的比。

这个不可分原理以"卡瓦列利原理"的名称在学校里应用，在那里它被阐述为以下的特殊情况："有两个物体，它们的底面在同一个平面上，高相等。用高相等且平行于底面的平面去截，如果它

们的截面等积，那么这两个物体等积。"①

卡瓦列利根据这个原理证明了许多定理。

他证明过相似三角形的面积之比等于对应边的平方的比。事实上，设 $\triangle ABC \backsim \triangle EFG$，我们把 $\triangle EFG$ 这样放，使它的顶点 E 与 $\triangle ABC$ 的顶点 A 重合，它的边 EF、EG 沿着对应边 AB、AC 的方向(图 28)。

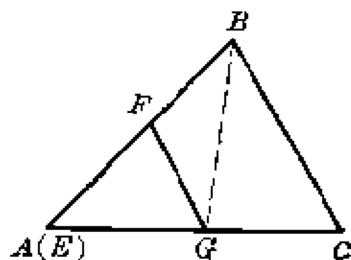


图 28

用直线连接点 B、G。这时 $\triangle ABG$ 的面积：$\triangle AFG$ 的面积 $= AB:AF$，$\triangle ABC$ 的面积：$\triangle ABG$ 的面积 $= AC:AG$。把所得到的比例相乘，得 $\triangle ABC$ 的面积：$\triangle AFG$ 的面积 $= AB \cdot AC:AF \cdot AG$。但是，根据已知两三角形相似，得 $AB:AF = AC:EG$。考虑到 $\triangle AFG \cong \triangle EFG$，亦即 $AF = EF$，$AG = EG$，因此得 $\triangle ABC$ 的面积：$\triangle EFG$ 的面积 $= AB^2:EG^2$，这正是所要证明的。

由于"不可分的和"的概念不够清楚，所以遭到了卡瓦列利同时代人的严厉批评。那时卡瓦列利已出版了《六种几何探讨》一书，在书中更详细地说明他所引入的概念。直到卡瓦列利去世之前，虽然他完全相信这些概念的正确性，但是这些概念在充分严格性上来说还留下某些疑问。

卡瓦列利在《几何学》里叙述的不可分的学说，不仅对初等几何作出了有益的设想，而且这种学说——用不可分求和——是积分法的典型。卡瓦列利在还没有使用积分学所固有的符号时，事实上就积出了形如

$$\int_0^a x^m dx$$

的积分。

---

① "卡瓦列利原理"在我国称为"祖暅原理"，因为祖冲之的儿子祖暅早已提出同样内容的原理，比卡瓦列利早一千一百多年。——译者注

此外，在卡瓦列利的《几何学》里，我们可以发现应用微分学求值的某些定理。例如，《几何学》的第一个命题包含着与罗尔定理等价的论断，罗尔定理相当于说：函数的图象在极大值、极小值点处的切线与横坐标轴平行。

卡瓦列利《几何学》最大的缺点之一，是作者回避采用代数，而使用了古代几何学家的几何方法。无疑，在卡瓦列利那个时代，代数符号的使用已经相当发达了。使用代数符号也许会帮助他比较简单和精密地解决他所提出的问题，也许会使他的著作比较容易被他同时代的人所接受。

十七世纪下半叶是无穷小量和数学分析的思想发展中进一步繁荣的时期。西欧的所有国家都对这些问题发生兴趣，许多数学家和物理学家都接触到无穷小量的思想，并作出了自己的理论。他们以这些理论为基础，并运用这些理论形成分析的主要分支，即微分学和积分学。在这些学者中，应当提到法国科学院院士日尔·罗伯瓦和荷兰物理学家、机械工程师、数学家克利斯琴·惠更斯。

法国科学院院士日尔·佩尔松叶以日尔·罗伯瓦(1602～1675)的名字闻名于世。他对抛物线求积问题钻研甚久，然而只是在熟悉了费尔马类似问题的著作之后，他才提出了自己的结论。他进一步得出摆线和蚌线[①]的求积法。在解决这些求积法时，罗伯瓦用极坐标解了一道题，这道题用现代的符号体系可以表示成形为

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x$$

的积分的计算。

罗伯瓦对以摆线的弧和摆线的底所包围的面积的初等求法，同样是有趣的。如果滚动圆的半径等于 R，那么当圆滚动一圈时，

① 蚌线是用下列方法得到的轨迹。由定点O作射线，与离点O定距离的某直线相交，在每一条射线上，从交点起往前截取相等的线段，这些线段的端点就是蚌线上的点。

摆线的底是长为 $2\pi R$ 的线段(图 29)。因此矩形 $ABCD$ 的面积等于$2\pi R\cdot 2R=4\pi R^2$。当圆O沿直线AD滚动一圈时，点A描出摆线整个的一拱弧 $AKMD$。按照问题的条件，要求出包含在弧 $AKMD$ 与直线 AD 之间的面积。在某一时刻，圆上的点 A 移到了位置K，并且点K在摆线上。从点 A 到点D 画一条正弦曲线弧。对于每一点 K，有一条与直线 AD 平行并把摆线和正弦曲线上的点连接起来的线段 KK_1，且该线段总等于对应弦 PQ 的一半。根据卡瓦列利不可分原理，由摆线和正弦曲线构成的一瓣曲线图形，与半圆 $AOBA$ 等积，而两个瓣相加与整个滚动圆的面积相等，即它们的面积等于 πR^2。同时根据作图可以知道，正弦曲线等分矩形 $ABCD$ 的面积。由此可见，所求的以摆线和直线AD为界的图形的面积，等于矩形 $ABCD$ 面积的一半加上圆的面积，即所求的面积等于 $\frac{1}{2}\cdot 4\pi R^2+\pi R^2=3\pi R^2$。

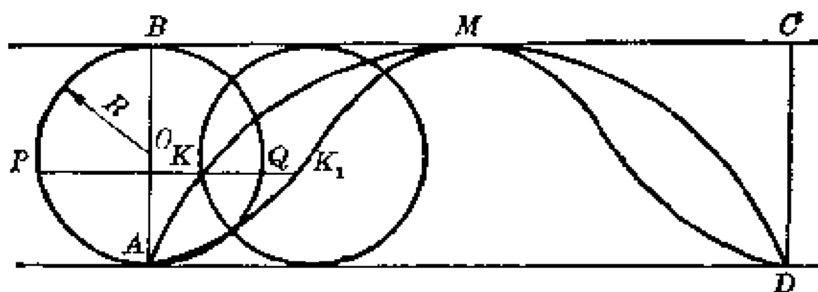


图 29

顺便说一说，罗伯瓦在自己的《论不可分》著作中，解决了一个关于圆柱与球相截的有趣的题目。他指出，球心在圆柱的表面上、半径等于圆柱底面直径的球截出的圆柱表面部分的面积，等于球半径平方的 4 倍。

罗伯瓦在 1668 年顺利发展了利用速度合成求曲线切线的方法。这个方法是以前意大利物理学家埃瓦杰利斯塔·托里拆利(1608～1647)提出的，但是罗伯瓦将它进行系统的阐述和运用。通过速度合成的平行四边形法则，罗伯瓦求出了已知焦点的圆锥曲

线的切线、蚌线的切线，以及阿基米德螺线、摆线和某些其他曲线的切线。必须指出，在解与切线有关的问题时，罗伯瓦把切线的方向与曲线的方向、该曲线上点的运动方向完全等同起来。



克利斯琴·惠更斯

荷兰物理学家、机械工程师和数学家克利斯琴·惠更斯（1629～1695）是十七世纪下半叶最大的科学家之一。

惠更斯的父亲按职业是位外交家，在各种科学领域里有着广博的知识，尤其是数学。同时他又是诗人和艺术爱好者。他给了儿子很好的教育。这就使得惠更斯在知识的许多方面表现出他的有才能的禀赋。惠更斯是摆钟的发明者。这个发明后来受到马克思很高的评价。1863 年 1 月28日马克思给恩格斯的信中写道："……从十六世纪到十八世纪中叶这段时间，即从手工业发展起来的工场手工业一直到真正的大工业这一时期，在工场手工业内部为机器工业做好准备的有两种物质基础，即钟表和磨（最初是磨谷物的磨，即水磨），……"。"钟表是第一个应用于实际目的的自动机；匀速运动生产的全部理论就是在它的基础上发展起来的。"①

惠更斯是光的波动理论的创始人。他利用减小色差和增加光强度为改进天文学仪器作了许多工作。从而使他有可能在天文学方面作出一系列新的发现。惠更斯把自己对光学仪器的研究写在《光学》里（1690），这部著作获得了很大的声望。

惠更斯在物理学和力学上进行大量工作的同时，对数学同样

① 《马克思恩格斯全集》第 30 卷，人民出版社 1974 年版第 318～319 页。

作了很多的研究。他还在青年时代就求出了圆、椭圆和双曲线弧的长度。1654 年他写出了著名的著作《论求圆周率》。在这部著作中，惠更斯用边数比前辈们要少得多的多边形，得出了 π 的近似表达式。特别是，阿基米德用 96 边形计算出 π 的值，而惠更斯只用了 12 边形就得到了 π 的值。由于他利用了重心的某些性质，所以他计算出的值具有更大的精确性。

为了认识太阳系物体的运动，惠更斯仔细研究了制作天象仪的问题，为此他又发展了连分数的理论。

除了以上所指出的问题外，惠更斯还对概率论产生兴趣，并为这个问题写出了论文《论赌博中的计算》。

惠更斯与笛卡儿和其他的大数学家的结识，促使惠更斯对当时大多数数学家所研究的问题发生兴趣，这就是曲线求积法。他没有对曲线求积作出任何严整的一般方法，但对每种问题他都发明了特殊的方法，从而显示出他独特的机智。在惠更斯的著作里，我们第一次发现有无穷小量的概念。在计算积分时他开始运用了无穷级数。

还应该指出，惠更斯从某些问题的解法中获得的方法，与微分方程的积分法相似。

十七世纪末期英国的数学知识水平有相当大的提高。在这个时期中，英国数学思想最突出的代表之一是约翰·瓦里士。

约翰·瓦里士(1616～1703)是肯特郡牧师的儿子，受过良好的古典教育。但是在这种教育体制中，数学不作为主要学科。由于瓦里士对这门学科感兴趣，所以他自修了数学。当瓦里士熟悉了与他同时代的数学家笛卡儿、卡瓦列利的著作以及古代数学家的作品之后，他对数学的兴趣就更浓了，并促使他自己也深入研究起数学问题来了。在这方面，他的才能，例如惊人的记忆力，帮了他不少忙。

瓦里士写了很多数学著作。其中有《无穷小算术》、《论摆线》，



约翰·瓦里士

《代数论文》、《普及数学，或完整的算术课程》。但在其中某些著作里没有严格的证明。这些著作中主要用的是不完全数学归纳法，瓦里士非常熟练地使用了这个方法，或者只是用推测，推测使瓦里士作出许多学术上的发现。瓦里士大多数著作的主要目的是使读者认识被研究问题实用的一面。

瓦里士主要的愿望是把数学知识加以推广，并宣传数学知识的实际运用。他认为算术的基本意义在于它是一种正确计算的艺术，代数能使计算大大简化，而几何学是一种精确丈量的艺术。

在瓦里士的三角学里引入了简化的写法：每一个三角值用一个字母表示（正弦用 S 表示，余弦用 Σ 表示，正切用 T 表示，余切用 τ 表示，正割用 s 表示，余割用 σ 表示），这使他有可能象运用任何其他具有符号记法的量那样来使用这些函数。应当指出，在瓦里士的著作中初次发现表示无穷大的符号 ∞。

在《无穷小算术》里，瓦里士引入了变量极限的概念，这个定义一直保持到现在："变量的极限——这是变量能如此逼近的一个常量，使得它们之间的差能够小于任何给定的量。"

瓦里士[①] 的著作在英国对增强数学学科的兴趣起了很大的作用。

---

① 对瓦里士的概况需要作补充。他在几何学方面试图用证明欧几里得公设（平行公设）的方法，修改平行线的理论。在瓦里士的推论中，他应用了下述命题（瓦里士公设）：存在相似比不等于1的相似图形。（В. Д. 奇斯佳科夫注）

在十七世纪下半叶英国的另一位数学家是伊萨克·巴鲁(1630～1677)。

巴鲁是工场手工业商人的儿子，在剑桥大学专门学习古代语言，并在瓦里士的指导下学习数学。

巴鲁29岁时在牛津获得希腊语言学教授的职位，然后在伦敦获得几何学教授的职位，最后从1663年起在牛津任数学教授。

巴鲁曾写过《光学和几何学讲义》。在该书中他对帕斯卡的特征三角形第一次使用了"微分三角形"的术语。

巴鲁在自己的数学著作里，仿效古代原子论的原理，把圆和另外的封闭曲线当作具有无限小边的多边形，所以认为曲线的切线是多边形一条边的延长线。他引入了"切线斜率"的术语，以及把它作为函数的无穷小增量与自变量的无穷小增量之比的极限概念。

在许多情况下，当同时遇到有限量和无穷小量时，巴鲁忽略了无穷小量。

他阐述的微分和积分问题之间的互逆关系，应该认为是他作出的一个特别重要的结论。

巴鲁经常向自己天才的学生伊萨克·牛顿求援，他和牛顿关系亲密。如果说牛顿对老师的数学著作有所帮助是可信的，那么更为确切无疑的是牛顿对物理数学学科有更多的兴趣，是受了巴鲁的影响。巴鲁总是感到自己的学生在科学领域里胜过了自己，因此在他担任工资更高的职务后，他自愿把剑桥大学数学教授的工作让给了牛顿。

伊萨克·牛顿(1643～1727)出生在乌尔索普镇的一个不富裕的农场主家里，该镇离格朗达姆城不远。在牛顿诞生前不久，他的父亲就离开了人间。1665年牛顿毕业于剑桥大学学院，并获得学士学位。1668年授予他硕士学位。此后不久(1669年)，巴鲁就把数学教授的工作让给了他，牛顿担任教授一直到1701年。



伊萨克·牛顿

还在牛顿作为一个教授开始自己的工作之前，他就有了一系列的发现。这些发现在人类知识的各个领域里开辟了崭新的途径，并使牛顿名垂万古。牛顿个人的性格特点是酷爱科学，非常谦虚，爱好劳动和“对自己寻觅的对象作连续不断的思考”。

英国遭到的灾难——鼠疫流行——迫使牛顿暂时离开剑桥。他单独一人到了安静的农村，专心研究了许多从青少年时代就感兴趣的问题。

就在农村的时候，牛顿产生了万有引力的思想。这种思想是由一个简单的想法发展过来的。这个简单的想法是，使月球留在它的轨道上与使苹果从树上落到地上是同一个力。假定任何一个落到地球上的物体被地球的一个力所吸引，这个力与这个物体到地球中心距离的平方成反比。牛顿证明，作用于月球的向心力与引力恒等。以后牛顿确信这个想法，并把自己的结论广泛应用到行星的运动、木星卫星的运动、潮汐现象、甚至是彗星的运动上。这样就发明了最伟大的定律之一，即万有引力定律。它能解释自然界一系列现象的来历。因此牛顿写出了《自然哲学的数学原理》的著作。这部著作在1686～1687年才发表。牛顿在这本著作里阐述了力学的基本原理（惯性定律、作用和反作用相等的定律、运动变化定律、万有引力学说，等等），又对这些基本原理在天文学和物理学中的应用作了大量的研究。①

① 牛顿虽然不是无神论者，但是在神学的影响下，在欧洲的许多大学里，曾经一度禁止讲授牛顿的天体力学和他的太阳中心学说。（B. Д. 奇斯佳科夫注）

牛顿在发明万有引力定律的年代，也是他在数学领域里有伟大发明的年代。在这个期间，他把二项式展开成幂级数。从上述概况中引用的许多材料中可以看到，二项展开式思想的发展用了相当长的时间。牛顿遇到了要完成展开自然数幂的二项式的方法问题，由于他找到了组成展开式系数的一般公式，就解决了这个问题。牛顿没有对自己结论的正确性作出严格的证明，但是他指出，这个公式可以推广到分数指数和负指数。顺便指出，自然数幂的二项式展开公式的严格证明，以后是由雅各·伯努利作出的，而欧拉提供了分数指数和负指数幂的证明，但是这个证明没有严格的根据。分数指数幂和负指数幂的严格证明，直到1811年才由高斯给出。

二项式的展开式，为牛顿提供了把某些其他的函数展开成无穷级数的基础，它又是发展数学分析、方程的理论、组合论和函数研究方法的最有力的促进因素之一。

牛顿的《利用无穷多项方程的分析学》是专门介绍级数问题的著作。这部著作他在1665年写成，到1711年才出版。在这部著作中，牛顿从形如

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1},\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

的二项展开式出发，用积分的方法能够得到 $\ln(1+x)$ 和 $\arcsin x$ 的展开式。

因为数学反映了周围世界的各种现象，它就成为牛顿认识自然界规律的最重要的工具。在深入研究统管现实世界所有物体的物理定律时，牛顿必须使认识这些定律的工具即数学更加明确和更加完善。这就是他能写出许多高深的、在探求新的研究方法上有价值的数学著作的原因。

牛顿在1665～1666年写出了《曲线求积论》，而在1670年写出了题为《流数术和无穷级数方法及其对几何曲线的应用》的论

文。这两部著作相当迟才出版，前者在1704年出版，后者在牛顿逝世后，于1736年出版。牛顿在这两部著作中叙述了数学分析的方法。在这两部著作中和在牛顿同时代人莱布尼兹的著作中，建立和完成了无穷小量的经典分析，也就是建立和完成了微积分学。

牛顿的数学分析的基本概念是力学概念的反映。连最简单的几何图形——线、角、体——都被牛顿看作是力学位移的结果。线是点运动的结果，角是它的边旋转的结果，体是表面运动的结果。牛顿认为变量是运动着的点。牛顿把任何变量叫做流动量。

至今我们还用术语"流动点"表示坐标连续变化的点，即运动的点。因为任何运动都离不开时间，所以牛顿总是把时间作为自变量。运动的速度，对于我们来说是导数，牛顿把它叫做流数，并用一个点表示，如果流动量为 x，那么流动率 $\dot{x}$ 是对时间的导数，现在我们常用 $\frac{dx}{dt}$ 表示它。

牛顿完全明白两种运算的互逆性：由已知的流动量求流动率，由已知的流动率求流动量。如此，他准确地建立了微分和积分之间的联系，这种联系在巴鲁的著作中有所暗示。

牛顿解决了正问题和逆问题，把它们的解用到大量的几何问题与力学问题上去。他作曲线的切线，求函数的极大值和极小值，求曲线的曲率，曲线的长度和以曲线为界的图形的面积。有时候他还解那样一种更复杂的题目，即根据流动率之间的已知关系式求出流动量之间的关系，也就是解微分方程。

牛顿最初求导数（流动率）的方法，主要采用弃去无穷小量，以后开始使用另外的方法，这种方法更接近我们现在使用的方法。但是在牛顿的著作里，我们没有看到他对这种方法作清楚的说明和严格的论证。这个方法是把流动率看作为"消失量最后的比"。这样解释流动率本身就包含了神秘主义因素，因此他后来引起别人的反对就不奇怪了。晚些时候，牛顿对这个问题采用另外的方法，

他开始利用作"瞬息间增量"的瞬刻，但是这样做并没有使过程变得明白些。

这样，就在牛顿精湛地运用自己的新方法，正确地去解决实际问题的时候，他并没有对这些方法给出严格的理论根据。

牛顿的著作《广义算术，或者关于算术的综合与分析之书》对于发展初等数学具有很大的意义。这部著作是牛顿在剑桥大学九年讲授初等数学的总结。就书的内容来说，它结束了许多世纪以来符号代数发展的过程。这本书在 1707 年由剑桥大学的维利亚姆·乌因斯坦(1667～1752)出版。他继任牛顿的数学教授职务。

牛顿在这部著作中首先给出了代数基本概念的定义，然后叙述数字和字母的整式和分式，包括开方的所有算术运算。接着阐述方程的理论，这时首先遇到从方程组中消去未知数的方法：加减法和代入法。牛顿非常注意列方程的问题。《广义算术》中大部分是题目，其中许多题目非常有趣，直到现在还被习题集的作者所选用。

特别需要指出的是，在整部著作中牛顿不用严格的证明，而是借助例子来说明理论。对这一点，他是这样解释的：证明是太容易了，有时难免会有使人厌烦的赘述。但是牛顿对他分析的法则和定理的论证未必都清楚，因为许多证明对于当时的学者来说是不能理解的。只有到了十九世纪才有一些大数学家作出了某些证明。

书名中提到的"广义算术"的概念，可用牛顿自己引用的解释来说明。他说："进行计算，或者利用数，例如在通常的算术里，或者利用形式(species)①，例如在代数里。两种方法以同样的原则为基础，又达到同一个目的，其中算术是用确定的和特殊的方法，而代数是用不确定的与一般的方法……代数有特别的优越性。在解算术问题时，只能从已知数求未知数，而代数的顺序则相反，可

① 词"species"(形式)是牛顿借用前辈人韦达、笛卡儿和其他人所使用过的词。对我们来说，这个词相当于"字母"。

以从看作为已知数的未知数求看作是未知数的已知数，目的是想法得出结论，或者是得到一个能求出未知数的方程”。

在上面的摘录里，牛顿对作为广义算术或者代数所特有的方法（即分析）下了定义。

转到列方程的问题时，牛顿用例子详细地解释和说明了这个过程。在这里也列举了多项式的许多有趣的性质，特别是谈到了确定多项式因子的独创的方法。

在我们研究的这本著作的题目中，正象已经指出的，在内容和解法上都很有趣。我们以著名的公牛问题作例子。在数学史上，这个问题叫“牛顿问题”。这个问题的原文是这样的：“12 条公牛在 4 个星期内吃掉 $3\frac{1}{3}$ 由格尔① 面积的牧场上的青草。21 条公牛在 9 个星期内吃掉面积 10 由格尔的同样牧场的青草。多少条公牛在 18 个星期内吃掉 24 由格尔的青草？”

我们引用这样的符号：设所求的公牛数为 x，一由格尔上有 y 个重量单位的青草，在一由格尔上一星期内长出的青草数量为 z。

那么 12 条公牛 4 个星期内在 $3\frac{1}{3}$ 由格尔上吃掉 $\frac{10}{3}y+\frac{10\times 4}{3}z$ 重量单位的青草，而一条公牛在一个星期内吃掉 $\frac{10(y+4z)}{3\times 4\times 12}$ 重量单位的青草。根据已知条件，每一条公牛在一个星期内在第二和第三牧场里吃掉的青草的数量可以这样来表示：

在第二牧场 $\quad \frac{10(y+9z)}{9\times 21}$，

在第三牧场 $\quad \frac{24(y+18z)}{18x}$

由此得到有三个未知数的两个方程：

(1) $$\frac{10(y+4z)}{3\times 4\times 12}=\frac{10(y+9z)}{9\times 21},$$

① “由格尔”是古罗马的面积单位，约等于 2500m^2。

(2) $$\frac{10(y+9z)}{9\times 21}=\frac{24(y+18z)}{18x},$$

把这两个方程化简后，用 p 代替比 $\frac{y}{z}$，得到

(1) $$\frac{p+4}{16}=\frac{p+9}{21},$$

(2) $$\frac{5(p+9)}{63}=\frac{2(p+18)}{x}。$$

由第一个方程得到 $p=12$。把这个 p 值代入第二个方程，得 $x=36$。

在牛顿的著作中，我们还要提到在 1711 年发表的《差分法》。这部著作最初试述差分理论，在牛顿之后差分理论发展成一门独立的科学，即有限差分理论。在《差分法》里包括有名的牛顿内插法公式。这个公式用现代的符号可写成这样：

$$f(x)=f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1}\cdot\frac{\Delta f(x_0)}{h}$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{1\times 2}\cdot\frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{1\times 2\times 3}\cdot\frac{\Delta^3 f(x_0)}{h^3}$$
$$+\cdots\cdots$$

在这个公式里，$\Delta^n f(x_0)$ 是已知函数的 n 阶有限差分，h 是自变量两个相邻值之间的差分①。

牛顿在物理方面的主要著作涉及到光的现象。在三卷文集《光学》中，牛顿系统地叙述了光现象的理论。在《光学》里，牛顿以一种假设作为光现象的基础。这种假设是：光是一种由发光体发射出来的一个个的微粒组成的射线。这个学说后来获得放射理论

① 函数 $f(x)$ 值的差叫做这个函数的有限差分，就是 $f(x_1)-f(x_0)=\Delta f(x_0)$；$f(x_2)-f(x_1)=\Delta f(x_1)$；……；$\Delta^2 f(x_0)=\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)$ 等等。

这个名称，它在科学界一直盛行到十九世纪，直到被波动学说代替为止。现代则把放射理论更新成量子理论。

牛顿成功地发现了白光能分解成有色光。他研究了光的衍射现象、薄层的颜色，并说明了光谱的颜色。牛顿还设计了反射望远镜。

就在我们前面提到的，曾带给他极大荣誉的著作《自然哲学的数学原理》问世的时候，牛顿遭到了不幸：在火灾时他的一部分有价值的著作被烧毁了。对这种损失牛顿是这样地难受，以致有些时候人们甚至要为他的理智而担心。

《自然哲学的数学原理》出版后，牛顿的名字在整个英国越发受到尊敬。在 1689 年他从剑桥被推选进国会，1696 年在他获得了造币厂主管人的职位后，他的物质条件大大地改善了。牛顿晚年十分富裕。

在安葬牛顿的遗体时，举行了在英国只有宫廷成员安葬时才能享有的仪式。在他的墓碑上用拉丁文刻下的题词，列举了牛顿对科学的丰功伟绩，题词的结束语是："让普通平凡的人们因为在他们的中间出现过一个人杰而感到高兴吧！"

我们已经谈到了在形成数学新分支——数学分析即微积分学的问题中，牛顿与莱布尼兹的名字是并列的。

戈特弗里德·威廉·莱布尼兹(1646～1716)1646 年 6月21日出生在莱比锡，他的父亲是莱比锡大学的道德哲学教授。莱布尼兹的祖父是斯拉夫人，用过卢贝热兹这个姓，但是当他们迁居德国后，他们的姓就开始照德国人的发音，即莱布尼兹。

莱布尼兹从童年时代起便能利用他父亲良好的藏书条件，这就使他能完全独立地熟悉某些科学。他自学理解了拉丁文，学习了经院哲学以及笛卡儿的机械论哲学。后者极大地吸引了年轻的莱布尼兹。在这种影响下，他对数学问题特别感兴趣。

莱布尼兹 15 岁时进入莱比锡大学，在大学里他选择了法学作

为主要专业。大学毕业时，尽管他有非常好的成绩，但是他没有能够马上取得学位，因为他过于年轻。1661年莱布尼兹就哲学逻辑性质的问题写出了学位论文，并在热奈当了副教授，1667年在阿尔特道夫获得了博士学位，并被推荐当教授。但是他宁愿去梅因兹城一位侯爵那里就职。在1672年莱布尼兹受侯爵的委托，由于外交



戈特弗里德·莱布尼兹

目的到达巴黎，在那里他结识了惠更斯以及其他许多杰出的学者。与他们结识，使莱布尼兹以往对数学的兴趣重又产生。然而，在这个时期之前，在数学家中间已经开始流传牛顿在自然数学研究中运用新方法的消息。牛顿本人并没有发表自己的发现，关于发现的消息是从牛顿与他人来往的书信中漏出去的。当牛顿把这些发现告诉了莱布尼兹时，莱布尼兹指出，他也发现了一种方法，这个方法与牛顿的方法获得同样的结果。莱布尼兹自己的方法发表在两本著作中，即《一种求极大值与极小值和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算》(1684)和《潜在的几何与分析不可分和无限》(1686)。

莱布尼兹在《……新方法》著作中叙述了微分学的基本原理，在这方面他以求函数的无限小增量的题目为出发点，函数取得这种增量是自变量无限小变化的结果。莱布尼兹把这个函数的增量叫做微分，并用字母 d 表示。

在上面说的莱布尼兹的第二本著作中，从求以曲线为界的图形面积出发得到积分的概念，并引入了积分的符号 $\int$，这个符号一

直保持到现在。但是“积分”的名称出现得比较迟，它是由J.伯努利提出的。

可以认为，上面提到的两本著作，是莱布尼兹分散在其他著作中的一系列思想的总结，也是他前辈们的思想的总结。

在莱布尼兹以前，无论是对于微分问题所应用的确定的符号，也无论是对于类似问题的各种情况都能使用的一般方法，都没有人作出过。莱布尼兹引进两个无限接近的变量值之间的差，作为微分的概念，拟制了微分法的整个规则系统(术语是莱布尼兹引进的)，所以他有充分根据把他发现的方法称为微分学。

莱布尼兹利用了帕斯卡使用的“特征三角形”。帕斯卡仅为圆周运用了特征三角形，而莱布尼兹为其他的曲线使用了特征三角形，这就大大地扩大了将微分学应用到几何学上的范围。

在积分学里，莱布尼兹没有局限于有理整函数的积分法，还作出了代数分式的积分法。

莱布尼兹在著作里巧妙地把函数展开成幂级数，并给出了展开式：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots$$

他还指出了交错级数收敛性的判别法。

莱布尼兹还发现把函数展开成幂级数的一般方法，在我们之前不公正地把这个方法归之于布鲁克·泰勒(1685～1731)。

莱布尼兹引进使用的许多数学术语，事实证明是十分正确的，因此直到现在还有意义，除了前面提到的以外，例如函数、坐标、代数曲线、超越曲线等等，都属此类。

莱布尼兹在数学发展中的作用，并不仅仅限于形成一种数学研究的新方法。

莱布尼兹在哲学问题上十分注意形式逻辑。他认为，逻辑当作思维的科学，象数学一样可以归结为符号运算。因此数学和形

式逻辑之间可以建立联系。后来形成为新学科即数理逻辑的那些思想，其萌芽就是莱布尼兹的这些想法。

莱布尼兹认为，代数成就的部分秘密在于运用符号的技巧。因此有可能设想建立新的算法，建立研究其他不同量之间关系的新代数。甚至于有希望把任何推论归结为符号的组合，还可能期望出现这样的时刻，两个哲学家不再无休止地争论，而是象两个数学家那样，拿起笔，坐到桌旁，用计算来代替争论。这样，普遍的数学变成推论的计算，并与逻辑融合在一起。

莱布尼兹采用符号的方法建立起数学分析的唯一的符号体系。在很多情况下，这种方法也帮助莱布尼兹进行数学计算。还有牛顿实际使用脚标指明值的序号，如 x_1, x_2 等，而莱布尼兹由于引用了双重脚标，使脚标的运用更加完善。例如，在研究方程组时，他把方程组写成这样的形式：

$$a_{10}x + a_{11}y = a_{12};$$
$$a_{20}x + a_{21}y = a_{22}.$$

在解方程组时，在构成行列式和矩阵时，以及在许多其他的情况下，我们现在广泛地使用类似的脚标。

综上所述，我们可以得出结论，牛顿和莱布尼兹研究微积分学的基础，都达到了同一个目的，但是各自的方法不同。如果牛顿主要是从力学的概念出发，那么莱布尼兹是作为哲学家和几何学家对这些方法感兴趣的。如果牛顿接近最后的结论要比莱布尼兹早一些，那么莱布尼兹发表自己的结论要早于牛顿。此外，莱布尼兹成功地建立起更加方便的符号体系和计算方法，因此在这些符号体系和计算方法发表之后，莱布尼兹的思想马上被广泛地采用。虽然英国人千方百计地力求维护牛顿的优先权，但是莱布尼兹的计算方法甚至在英国也逐渐地取代了牛顿的方法。

为研究周围生活的各种现象而创造象微积分学这样一些卓越

的方法时，牛顿对莱布尼兹的影响有多大，直到现在尚未弄清，因此发明的荣誉应由这两位伟大的思想家分享，我们现在不要把这些科学成果的优先权归属于其中任何一个人。

牛顿和莱布尼兹的发明，结束了以伟大文艺复兴时代初期的科学思想的觉醒为起点的科学发展的漫长时期。以后这种发展就进入到新的阶段。

十八世纪西欧数学分析发展概况

通过观察积累了大量事实以后，人类得出结论：世界上不是所有的东西都是永恒的，并不象以前一切宗教所认为和说明的那样。例如，康德—拉普拉斯的理论确认，整个世界包括我们的地球在内都有着生存的各个阶段。生物学和古生物学的发现，证明整个动植物界也在发生变化，就是生物的最高代表——人，也在发生变化。

科学能建立个别种类和生物形态之间的联系，能说明它们的一般特性，因而也就说明了它们之间的差别。人们逐渐发现动植物界有联系，甚至于发现可作为动植物中间环节的生物，不能精确地将它们列入动物或是植物。最后，甚至对生物和非生物的区别也产生怀疑，也就是说，会产生一种想法：从无机物质有可能产生生命细胞。

在这样的时代，当人开始发现他周围生活和自然界中正在发生的变化的时候，受几何、机械、物理、技术问题的影响而建立起研究变量变化方法的数学，就具有特别的意义。它开始成为人研究周围世界的相互关系，研究周围世界各种现象的必不可少的工具。但同时在数学中也产生了深刻的内部危机，产生的原因是由于微积分学中某些概念的论据不足。而这些概念却又是新方法的奠基人引用来作为依据的。虽然牛顿发展的极限理论是够严密的，但是在这种理论中还有不清楚的地方。此外，牛顿在引用无穷小量

时，未曾一贯地、彻底地转到极限问题上。

至于莱布尼兹及接近他的追随者，在他们的学说中，我们也未找到对无穷小量概念的清楚而精确的定义。这个概念在不同的场合有不同的说法。

这样，数学分析的创造者们是把一种出色的、用于研究各种现象的工具交给了人类，但是对这种工具的结构原理未提供足够清楚的说明。因此，数学分析正在试验中的、解决各种各样性质问题的实际应用能力没有得到理论上的论证，这就引起了怀疑：新方法成功的应用是否纯属偶然。

许多哲学家和数学家都指出了数学新学派在理论上没有根据，因而极力反对应用无穷小量。在数学界存在两种倾向：一部分人深信新方法完美无瑕，很想使它在理论上深化，使这种方法有坚实的基础。另外一些人则完全相反，他们不是坚信它有根据，因而在自己的科学研究中完全避开无穷小量。

特别反对无穷小量分析的是教会。他们感到，以变量概念为基础的新的学说，对于反动的宗教观念是一个很大的威胁，那种观念认为，作为万物综合体的世界是由上帝创造的，它从创立那时起就是不变的。反对无穷小量最厉害的人之一是英国的主教乔治·贝克莱(1684～1753)。这个哲学家、思想家对他同时代数学家的许多原理疯狂地提出异议。列宁在论文中对贝克莱的哲学作出毁灭性的回击(特别是在《唯物主义和经验批判主义》中)。

对乔治·贝克莱也需要说句公道话，他反对无穷小量的思想，在某种程度上也是有根据的，那时分析的主要概念(无穷小量和无穷大量、导数、微分等)没有获得严格的理论基础。

在《人类知识原理》著作中，他反对认为有限量可以无限分下去的这种看法。在证明他的论断时，他说："每一段单独的有限距离，它可以作为我们思考的对象，是一个只存在于我们头脑中的想法，因而它的每一个部分应该是可以被认识的。那么，既然我不能

认识一条线、一个表面或一个物体上的无限多的部分，……我由此推论，这些无限多的部分是没有的”……“任何一个认为感觉到的东西存在于精神之外的人一定不难肯定地说，一根只有一寸长的线段包含无数个点，这些点事实上是存在的，虽然小得难以感觉出来。这种谬解在几何学家以及其他一些人的头脑中根深蒂固”……‘关于无穷小量抽象的议论在最近达到这样的程度，以致堕落成如此古怪的概念，结果它们就成为几何学家中不少疑问和争论的导火线，其中某些名声很大的人对这种说法——似乎有限的线段能够分成无限个部分也感到不满意，但是接着又确信，这些无穷小部分中的每一个，本身也可以分成无限个另外的部分，或者二阶小量等等，直到无穷阶无穷小量”……“其他人则肯定地说，所有低于一阶的无穷小量实质上不是别的，而是有根据认为荒谬的某种提议，似乎存在某个正数或者距离的一部分，这一部分甚至被无限制地增长，任何时候不与已知最小的距离相等”……“我们是否有理由从这里得出结论，这种或那种人都错，并认为事实上不存在在有限量中包含象无限小部分或无穷多个部分这类东西？”……

乔治·贝克莱在另一著作《分析学家》中更激烈地反对无穷小量的学说。在此书中他特别攻击牛顿的方法。他说：“首先，理智无法理解这些最后的‘瞬时’或‘最后的增量’”。“什么是流动率？是消失增量的速度。那么这些消失增量又是什么呢？这不是有限数，不是无穷小量，甚至什么也不是。我们能否把它们称做为已死量的幽灵？”

我们不准备再引述贝克莱的其他一些说法，以及他对莱布尼兹和莱布尼兹的信徒们的一些主要思想的攻击。要指出的是，类似的攻击迫使数学家和哲学家进行深思，迫使他们注意新方法的论证。哲学家的任务是要从方法论上为新方法提供坚实的基础。这些坚实的基础有助于消除数学中所有那些模糊不清，似乎是神秘的概念，象导数概念。数学家们面临的问题是，建立严格的科学

论证，为的是采用新方法，或者完全放弃使用无穷小量。

由莱布尼兹作出的新的计算方法开始很快地在他的同时代人中传播开来。瑞士数学家伯努利首先拥护这些新的计算法。



雅各·伯努利

雅各·伯努利（1654～1705）是巴塞尔大学的数学教授（从1687年起），他和弟弟约翰·伯努利（1667～1748）与莱布尼兹书信往来频繁，这就使他们能大大扩大莱布尼兹方法的使用范围。雅各·伯努利甚至在从莱布尼兹那里得到某些说明之前，由于引用了莱布尼兹的新方法，解决了所谓最速降线问题。这个问题是求出最快速下降的曲线，就是在重力场内有一个点，这个点仅在重力的作用下，由等于零的初速度沿着那样一条曲线运动，使得该点在最短时间内从预先给定的一个位置降到另一个给定的位置。雅各·伯努利指出，这条曲线是摆线。雅各·伯努利在这篇著作中运用莱布尼兹引用的符号 $\int$ 时，第一次命名这个符号为积分，以前他曾象莱布尼兹那样把它叫做和。从这时起，莱布尼兹本人采用了这个名称，并把术语“积分学”与“微分学”并列。

在广泛地使用这些计算法时，雅各·伯努利解出了一系列几何问题。例如他得出平面曲线曲率半径定义的公式，并研究了很多曲线，例如对数螺线，悬链线（一条两头系住、不拉紧的线或链条所形成的曲线）。他发明和研究了双纽线，即到两定点（焦点）距离的积等于常量 a^2 的曲线。在笛卡儿坐标里，表示这条曲线的方程是

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0,$$


约翰·伯努利

而在极坐标里，这条曲线的方程是

$$\rho^2=2a^2\cos2\varphi。$$

雅各·伯努利最先发现调和级数的发散性。

雅各·伯努利在1705年去世之后，巴塞尔大学的数学讲授由他的弟弟约翰·伯努利接替，在这之前约翰·伯努利是荷兰哥罗宁大学的数学教授。

在莱布尼兹协作之下，约翰·伯努利促进了微分学的定型和建立了某些数学原理。在函数理论中，他认为函数可借助于常量和变量，用解析式表达出来。这是明显的进步，因为在这之前函数只有几何解释。

约翰·伯努利在数学分析方面的著作对微分方程问题的发展产生了良好的影响（莱布尼兹当时把微分方程叫做“求和方程”）。他研究了怎样解齐次微分方程和一种线性微分方程，就是所谓的伯努利方程，以及解常系数方程的方法。

在研究求分子分母同趋于零$\left(\frac{0}{0}\right)$的分式极限时，约翰·伯努利发现了一个法则，这个法则被错误地命名为洛彼塔法则。他还作出了把函数展开成级数的表达式，这个级数与泰勒级数相似。

在求曲线的长度和求积计算这些几何性质的问题时，约翰·伯努利完善和发展了积分计算的方法。例如他彻底地研究出有理分式的积分方法。

伯努利两兄弟由解与极大值和极小值概念有关的题目而研究了一些问题，后来(主要是在欧拉和拉格朗日的著作中)这些问题发展成为数学学科的独立分支。这个分支叫做变分法。

此外，约翰·伯努利编写的微分学和积分学的讲义，留下了良好的印象。他曾给自己的学生洛彼塔侯爵讲过这份讲义，后来这些讲义就成为洛彼塔编写第一本微分学教程的基础。

侯爵基利奥姆·弗拉苏阿·洛彼塔(1661～1704)能够很好地利用从约翰·伯努利那里得来的知识。因此，他于1696年出版了《无穷小分析》。应该认为这本书第一次有系统地叙述了微分学。它的优点是叙述上的系统性和条理性。在十八世纪，《无穷小分析》出版的数量很大，并且由法文翻译成英文。

洛彼塔的《无穷小分析》是第一本系统的微分学教程。但是从哲学和严格的数学观点来看，它没有解决完善分析基本概念的问题。这些概念仍然带有神秘性。因此毫不奇怪，在十八世纪末，即1784年，为了"对数学中称之为无穷的概念建立严格和明确的理论"，柏林科学院作出了悬赏征求。

著名的法国数学家、力学家约瑟夫·路易·拉格朗日(1736～1813)当时是柏林科学院院长，他企图使数学分析摆脱使用无穷小量和极限。为了这个目的，他提出了作为函数的幂级数展开式系数的各阶导数的概念。这样，他根据有限量代数的概念顺利作出了分析的概念。但是，这时作了函数能展开成幂级数的假定，这就大大限制了函数的一般概念。此外，他所建立的算法比莱布尼兹的算法要复杂得多，所以他的方法在实际应用上是不方便的，然而拉格朗日能够有成效地研究数学分析中的很多重要问题。他给出了表示泰勒级数余项的公式，这种公式实际运用很方便。他研究了条件极大值和极小值的理论。在解线性微分方程时，他作出了常数变易法。在初等数学方面，拉格朗日研究了连分数的理论。



让·达朗贝尔

法国数学家、哲学家让·勒朗·达朗贝尔（1717～1783）① 试图为数学分析作出严格的论证。

达朗贝尔首次把极限理论作为分析的基础，并要为分析提出根据，这就是他的功绩。我们往后会看到，这个想法后来由法国数学家柯西实现。达朗贝尔在《科学、技艺和手工业的百科全书》里对变量极限给出了这样的定义："一个量是另一个量的极限，假如第二个量能比任意给定的值更为接近第一个量，无论这个给定的量是多么小，不过作逼近的量任何时候都不能超过被接近的量。这样，这个量与它的极限的差绝对指不出来。"显然，这是对单调增加的量作的极限定义。

达朗贝尔在数学发展史上的功绩并不限于试图作出极限的理论。在微分方程的级数理论方面他做了相当多的工作。他获得了正项级数收敛性的判别法。至于常系数微分方程，以及一阶和二阶线性方程组，达朗贝尔也在相当大的程度上促进了它们的理论发展。此外，他给出了一个二阶的数学物理偏微分方程的解法，这个方程表示弦的横振动，名叫波动方程。在达朗贝尔的著作中，第一次发现复变函数的实际应用。

达朗贝尔和欧拉还发现复变函数可微的条件，这些条件用柯西-黎曼条件的名称载入数学是不正确的。

---

① 关于学者的姓有这样一段历史：婴儿时他被遗弃。警察局的一个官员吩咐把这个捡来的孩子取名为扎恩·勒隆（在记忆中，他是在圣哲勒隆（Gean le Rond）教堂附近的入口处拾到的）。达朗贝尔这个姓是学者在成年时按培养他的阿朗贝尔的名字造出来的。（B. Д. 奇斯佳科夫注）

如果说，拉格朗日设法完全放弃无穷小量的概念，而达朗贝尔设法利用极限的方法给出它们的理论根据，那么第三种途径，即用事实证明和说明无穷小量的现有算法的一种方法，则是由拉扎尔·尼古拉·卡诺（1753～1823）提供的。卡诺出身于法国勃艮第的纳兰城一个地方公证人的家庭。在麦济叶尔城受过军事工程师的专门教育。他积极参加1789年的法国资产阶级革命，从1791年起他当立法会议的成员，从1792年起成为议会的成员，在那里他作为雅各宾党人投票赞成对国王路易十六处以死刑。1793年卡诺受托组织革命军。欧洲国家派遣了大规模的武装力量反对法国革命。卡诺建立了强大的军队，这支军队善于给欧洲国家联盟以应有的回击。这就是法国人民恰当地把他叫做“革命的将军”、“胜利的组织者”的原因。保卫革命成果的艰难重任也没有使卡诺放弃对数学的刻苦钻研。无论在怎样的情况下，他都没有忘记数学。在他成为当时的大几何学家后，他在数学的舞台上获得了很大的成就。



拉扎尔·卡诺

卡诺在1797年写出了《关于无穷小算法的形而上学思想》的著作。在这本著作中，他详细谈论了“无穷小”的概念。他说：“数学中叫做无穷小的量，既不是真正在消失的量，甚至也不是真正的小于某个有确定值的量，而只是这样的量，根据该问题和命题的条件进行计算时，为了求在这些量的值变化时量与量之间的比，在计算过程中这些量始终是变化的，并且是在连续地变小，直到变成任意

小。被称为无穷小的那些量的真的特征只是在这里，完全不在于那个从它们的名称看似乎实际应该具有的‘小’上，也不在于假定无穷小能够接受的那个‘绝对小’上。因此我们现在可以看到，无穷小量的概念是简单的，没有任何不确定和引起争论的想法。”卡诺把这样的定义记载在自己著作的第一部分中，照他的看法此定义能证明无穷小概念的正确性。与此同时他研究了历史上形成的各种无穷小量的方法（消去方法、极限方法、流数术方法、莱布尼兹的方法），由此得出结论，所有这些方法在实际运用中都有自己的地位：一种方法对解决一些问题比较方便，而另一种方法则对解决另一些问题比较方便。但是卡诺还是看重莱布尼兹的方法。然而卡诺作出的无穷小分析的理论根据是非常有问题的。他的推论基于下述设想：在分析中利用另一个错误而摆脱一个错误，从而得到绝对可靠的结果。当取包含无穷小量的近似值代入原方程时产生第一个错误，而当后来舍弃这个无穷小量时产生第二个错误。卡诺用一系列的例子来证明自己的理论是正确的。当然，这样的说明不能认为是严密的。

象我们看到的那样，在达朗贝尔和卡诺的著作中，对应用于数学分析中的方法没有作出充分的证明。结果一些先进的数学家继续在思考确立一些数学研究的方法，这些方法要建立在更牢固的基础上。这个基础被法国另一位数学家柯西找到。

奥古斯丹·路易·柯西（1789～1857）是法国杰出的数学家，他出生在巴黎。从幼年起就表现出对数学有很大的才能，由此引起一些大学者对他的注意。

在综合技术学校毕业后，他在瑟堡任工程师。1816年成为科学院的委员和巴黎一所技术学校的教授。但是他对君主制度的信仰与对共和政体总制度的背道而驰，迫使他于1830年离开巴黎而侨居国外。他于1838年返回祖国，回国后很久还不能恢复自己原先的职务，只是从1848年起才成为巴黎一所大学（索尔奔纳）的

教授。

柯西的《分析教程》(代数分析)和《无穷小算法讲义概要》应该算作是有系统的数学基本教程。此外,他的微分方程、复变函数论,以及代数方面的许多著作都具有很大的意义。例如,他深入研究了行列式的理论。



奥古斯丹·柯西

柯西在《分析教程》里第一次提出了数学分析的新的理论基础。在这本著作中有无穷小量严格的定义,并把取极限的概念作为基础。这种定义能够给微积分学课程中的无穷小量的整个运算提供根据。

柯西以他作出的无穷小量概念为根据,建立了以下连续函数的定义:如果自变量增量的无穷小对应于函数增量的无穷小,那么这个函数是连续的。

在上述一些著作中,柯西还发展无穷级数收敛的学说,并作出了作为积分和极限的积分概念。柯西在数学史上很大的功绩是,他为复变函数理论的发展奠定了基础。他证明在复数范围内的幂级数具有收敛圆,又给出了含有复积分限的积分概念。

柯西证明,在不包含奇点的区域内存在满足确定条件的微分方程的解。这样他使微分方程的理论深化了。

柯西的数学分析的理论根据是这样可靠,以致于这个理论根据一直保持到十九世纪末。不过在十九世纪末又有必要重新修订这些原理,并为列入古典数学分析的那些概念作出更加严密的根据。这就由数学概念新学派的创造者完成了,他们是用集合论解释函数依赖关系的拥护者。

数学新分支——集合论——的发展，使数学的基本概念能够建立起更严密的定义：函数、导数、连续性、积分等。直到现在这些定义还是无可争辩的。根据集合理论，数学的基本概念，即数获得了更深刻的解释，数学分析中也出现了新的分支，即函数论（实变函数和复变函数）。

数学分析在哲学上的论证与理论上的论证是同时进行的。十九世纪，伟大的思想家——国际无产阶级的领袖马克思和恩格斯对一系列的数学基本概念，给出了辩证唯物主义的解释。

弗里德利希·恩格斯（1820～1895）在自己的著作《自然辩证法》和《反杜林论》中，详细地解释了由于引用无穷小量的概念而产生的疑问，并指出这个概念是完全合乎实际的。因而他彻底地挫败了贝克莱的种种企图。贝克莱企图证明将这些概念列入严格科学的理论是没有根据的。

弗里德利希·恩格斯写道：“在一切理论成就中，未必再有什么象十七世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。如果在某个地方我们看到人类精神的纯粹的和唯一的功绩，那就正是在这里。现在还环绕在微积分中所运用的各种数量（各次的微分和无限）周围的神秘，是下列事实的最好的证明：人们还在设想，这里所研究的是人类精神的纯粹的‘自由创造物和想象物’，而客观世界决没有与之相适应的东西。可是情形恰恰相反。自然界对这一切想象的数量都提供了原型。

“我们的几何学是从空间关系出发，我们的算术和代数学是从数量出发，这些数量和我们的地球上的关系相适应，就是说，和存在于地球上并由人使之运动的、力学称之为质量的物体的大小相适应。和这些质量比起来，地球的质量显得是无限大，而它也就被地球上的力学当做无限大来看待。地球半径等于无限大，这是考察落体定律时整个力学的原则。但是，当我们所考察的是那些用天文望远镜才能观察到的恒星系中的、必须以光年来计算的距离

时，不只是地球，而且整个太阳系以及其中的各种距离，都又成为无限小了。这样，我们在这里不仅有一次的无限，而且还有二次的无限，我们的读者如果高兴的话，还可以用自己的想象构造出无限空间里的次数更高的无限。"①

这样，恩格斯解释了无穷小量以及它们的各种次数的实际来历。然而在这方面无穷小量作为变量的纯数学概念还是有些不清楚。而微分及其所有的数学特性倒是完全符合实际的。恩格斯对此作出下列说明："……分子和相应的质量具有完全同样的特性，正如数学上的微分和它的变数一样。唯一的差别是：在微分中，在数学的抽象中，在我们看来似乎是神秘的和无法解释的东西，在这里都是不证自明的，并且可以说是一目了然的。"②

最伟大的德国唯心主义者哲学家乔治·威廉·弗里德利希·黑格尔（1770～1831）在对数学概念作判断时，他给微分作出了一个很模糊的解释，其特点是抽象性和包含神秘因素。

卡尔·马克思（1818～1883）对微分和导数概念的解释却与此不同。这个革命科学的伟大创立者、科学共产主义的奠基人，在暮年对数学非常感兴趣，并对分析的某些概念作出了辩证的解释。在马克思的手稿中有大量数学问题的资料。马克思的数学手稿③主要研究的是微分学。在手稿中我们可以发现马克思揭露了分析基本概念中的神秘性，这种神秘性存在于分析的创始人牛顿和莱布尼兹的思想中。至于牛顿在给流数术下定义时运用的那种以"最后比"为基础的运算法，马克思认为，无论是牛顿本人，还是他的追随者，都相信新发现的计算的神秘性。这种计算的方法是完全不正确的，而结果是正确的（并且在几何关系中简直是非常突出的）。

马克思以自己的观点指出，求函数的导数过程并没有什么神

① 恩格斯：《自然辩证法》，人民出版社 1971 年版，第 244～245 页。

② 同上书，第 246 页。

③ 马克思的数学手稿在他生前未曾出版。1933 年在苏联首次部分出版，1968 年全部出版。（1975 年中文版已由人民出版社出版。——译者注）

秘，为了得到导数，我们实质上是使用通常的代数方法。他首先注意到，如果研究某一个函数 $f(x)$，假定量 x 具有两个值 x_0 与 x_1，那么用 x_0 与 x_1 表示的差 $f(x_1)-f(x_0)$，可以作出下面的结论

$$f(x_1)-f(x_0)=(x_1-x_0)\varphi(x_1,x_0),$$

当 $x_1=x_0$ 时，变为恒等式 $0=0$。但是，当 $x_1 \neq x_0$ 时，x_1-x_0 是一个有限量，所以可把等式表示成这样的形式：

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\varphi(x_1,x_0)。$$

马克思把这个函数 $\varphi(x_1,x_0)$ 叫做"预备导数"。$x_1=x_0$ 时预备导数的值给出导数 $f'(x_0)$。最重要的方面是当 x_1 取 x_0 值时，等式左边为 $\frac{0}{0}$，但是这个式子的意义，通过等式的右边可以实行的计算可用代数的方法展开阐明。既然这个代数方法是明确的，导数就完全可以确定，马克思把这个过程叫做代数微分法。

马克思给出了上述求出预备导数的顺序，然后把它用于导函数，从而消除了这个过程的神秘性，使它变得真实了①。因此表示导数的符号 $\frac{dy}{dx}$ 具有实际的意义。十分自然，表示高阶导数的符号也同样有实际意义。例如，$\frac{d^2}{dx^2}$ 给出 $f'(x)$ 的导数的表达式，$f'(x)$ 本身不是别的，也是 x 的某一个函数。因此，在求二阶导数的整个过程，也要通过象求一阶导数的过程一样的顺序。

现在，无论理论上还是方法上都获得了充分根据的经典分析，它是人类手中强有力的工具。人类巧妙地使用这个工具以揭开自然界的规律，挖掘潜在的力量，并改造自然，目的是更好地建设人类社会，创造必要的能减轻人的劳动的生活条件。

① 关于求导数和预备导数过程的全部叙述，参看马克思《数学手稿》，人民出版社 1975 年版，第 25～42 页。

十八世纪和十九世纪初西欧几何学发展概况

在谈论法国几何学思想发展时，我们曾提到过笛卡儿、帕斯卡和另外一些科学家的名字。我们还应该把十八世纪的大数学家克雷罗的名字列入他们的行列。

阿列克西斯·克洛德·克雷罗（1713～1765）是著名的数学家，他在童年时代[①]就表现出非凡的才能。

克雷罗在12岁时就向巴黎科学院提出了特殊曲线的报告。顺便提一下，在这个报告里，他对四次代数曲线的一种类型作出了研究。在1729年，即克雷罗只有16岁时就写出了巨著《双重曲率曲线的求法》。这部著作给科学院的成员留下了很深的印象，因而当克雷罗刚满17岁时，他就被授予科学院正式院士的称号。按照科学院当时的规定，入选的院士应该不小于20岁，所以克雷罗是破格选进的。上述著作对几何学的发展具有很大意义，因为该著作与欧拉的著作一起为认真研究空间曲线奠定了基础。克雷罗第一次引用曲线积分的概念，以及给出了多元函数的全微分的概念。



阿列克西斯·克雷罗

① 克雷罗有一个弟弟（17岁去世），弟弟也很早在数学方面表现出杰出的天才（在14岁时就写出了几何学的论文，该论文发表在巴黎科学院的丛刊上）。（B. Д. 奇斯佳科夫注）



加斯巴尔·蒙日

法国资产阶级革命时出现了一位著名的几何学家，他的著作大大地扩大了研究空间形状的范围，并使这种研究具有严格的科学基础。他就是蒙日。

加斯巴尔·蒙日(1746～1818)出生于农民兼小商的家庭。蒙日的父亲使他的三个儿子都受到良好的教育，以至后来他们都成为数学教授。

1769年蒙日被任命为麦济叶尔城工兵学校的教授。他在这个学校里工作多年，这是他一生中能够发展他的数学基本思想的时期。这些基本思想为数学增加了新的方向，并被应用于工程学。数学中产生了数学知识的新分支，即画法几何学，这应该归功于蒙日。他被认为是画法几何学的创始人，这是实在的。他在十八世纪七十年代中期写完了《画法几何学》。这本著作多年以手稿的形式用于教学，只是到1799年才出版。

蒙日懂得他自己创造的科学对工业的巨大意义，同时他认为科学可以“把法国人民从迄今为止所处的依赖于外国工业的状况下解放出来”。

从蒙日那时起，画法几何学就有了严密的科学体系。

在十八世纪八十年代蒙日稍稍离开纯数学的研究，他把整个注意力集中在实用性的问题上。这主要可用蒙日个人生活中情况的变化来加以解释。他结婚以后便成为冶金工厂的业主，因而对金属加工的工艺过程发生兴趣。这种兴趣促使他在物理和化学上获得巨大成就，并使他的名字与这些科学领域里的伟大学者的名

字并列。

1780年蒙日当选为科学院院士。1784年离开了麦济叶尔学校，迁居巴黎。在巴黎碰到了他热情相迎的法国革命。他理解到，政治制度的变化将有助于科学的发展。为了帮助这个事业，他自己作出了很大的努力。

大家知道，以采用米制为标志的度量制的改革，是革命时期促进科学发展的事业之一。蒙日是贯彻这项措施的委员会中的一个成员。

当君主制度被推翻并建立起第一个革命政府——临时执行委员会——时，蒙日参加了这个委员会。开始他担任海军部长职务，然后为了保卫法国他运用了自己的知识。在这方面，他改进了车削炮筒和钻孔的技术，他还组织大规模的硝石开采。革命民主专政被推翻以后，蒙日起初躲藏起来，担心法国新政府的追捕。但是新政府需要象蒙日这样的大学者为它服务。他被吸收到中央公共工程学校当教师。该校于1794年创立于巴黎。由于蒙日以及其他一些大学者的努力，这所学校成为法国最先进的学校。这个学校培养了一批相当有资格的学者。1795年这所学校改为综合技术学校。在改组和建立整个学校的体制中，蒙日起着领导作用。在这个学校里他讲授画法几何学和分析课程。他的画法几何学思想最后在这里定型，在这里还准备和发表了他的著作《分析应用于几何学的若干页》。这本著作的第三版于1805年出版，叫做《分析在几何学上的应用》。

蒙日在这所综合技术学校里阐述过一价偏微分方程积分法的理论，并给出弦振动问题的解法。

在研究空间曲线的渐屈线时，蒙日首先把曲面的曲率线引入科学，还研究了可展曲面的包络性质。此外，他给偏微分方程作出了几何说明，另一方面，又用偏微分方程的语言说明几何事实。

在蒙日一生的后期，他的命运跟他祖国的政治生活紧密相连。

他不得不作为技术问题的顾问参加拿破仑·波拿巴将军的第一次远征。在那时候，拿破仑想方设法表示他对一些学者和他们的著作的尊敬。这一下博得了蒙日对他的好感，蒙日对科学的利益无限忠诚。再说，拿破仑最初几次消灭欧洲封建关系残余的胜利，被蒙日(不是他一个人)看作是进步方式的出现。在拿破仑失败以及波旁皇朝重新复辟后，由于他过去参加革命，并与拿破仑的关系亲近，蒙日遭受到反动势力的残酷迫害。蒙日象法国其他进步科学家一样，被开除出科学院和综合技术学校委员会，并被剥夺了养老金。

因祖国受到侮辱而产生的深刻的悲痛，离开心爱的工作，没有这种工作蒙日无法生存，还有反动制度带来的其他苦楚，这种种情况给70岁的学者带来有害的影响。1818年6月28日蒙日与世长辞。

在进一步发展几何学思想中作过相当贡献的是德国最大的数学家高斯。

卡尔·弗里得利希·高斯(1777～1855)出身于布劳恩施魏克城一个贫穷的自来水工人的家庭。有位公爵曾有机会亲自证实这个孩子具有异乎寻常的才能。在这位公爵的鼓励之下，他得以在哥廷根大学受高等教育。在1799年高斯得到副教授的称号，而从1807年起成为教授和哥廷根天文台的负责人，他在天文台一直工作到逝世。

高斯的大量内容深刻的著作与数学各个方面有关，与天文学和大地测量学也有关。

高斯最初所写的重要的数学著作之一是《算术探讨》。这部著作是现代数论的基础。在书的第一部分中，高斯发展了二次剩余的理论[①]。在同一部分中作出了所谓互反律(高斯把这个定理叫做

① 如果差 x^2-a 能被 m 整除，那么 a 叫做整数 x 对模 m 的二次剩余，如果这个差不能被 m 整除，那么 a 叫做非剩余。

"黄金定理"),这个定理是欧拉发现的,但是高斯首先作出了证明。我们利用勒让德所作出的符号表示这个定理,勒让德符号的意义:当 a 是模 p 的二次剩余时,$\left(\frac{a}{p}\right)=1$,当 a 不是二次剩余时 $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$。因此互反律具有 $\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{p}{a}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}}$ 的形式。



卡尔·高斯

《算术探讨》的第二部分包含二次型的探讨,就是当 a、b、c、m、n 为整数时,确定三项式 $am^2+2bmn+cn^2$ 能够取怎样的值。

该书第三部分专门介绍解形如 x^n-1 的二项方程的问题。这里特别注意类似二次根式的方程的可解性。它与几何作图问题有关。大家知道,只有当几何图形与不高于二次的有理方程或无理方程相联系时,才能用圆规和直尺进行几何作图。

高斯把自己的二项方程解法的理论应用于作正多边形,从而把产生于古希腊人且 2000 年来没有进展的问题解决了。用高斯的方法可以作出判断,利用圆规和直尺能作出哪些正多边形,以及如何作图。特别是,高斯证明了能够作正十七边形,他自己就完成了这个作图。高斯认为这个问题的解法具有很大的意义。因此遵照他的遗嘱,在他的墓碑上画了一个内接于圆的正十七边形。

我们在前面已经不止一次地谈到虚数怎样深入到生活中的问题。然而只有当称之为"复数"的概念能用几何解释,并使之真正具体化时,它们才得到普遍的使用。复数的表达式 $a+bi$ 是高斯在探讨四次剩余中第一次提出的(在 1825 和 1831 年的著作中)。

虚数和复数是在高斯死后才得到使用的，这种使用是逐步形成的。

在瓦里士的《代数》(1685)中，我们就看到用几何描述虚数的初步的迹象。瓦里士发现用代数解某些几何问题时，在一定的题目里，它们可用方程表示，这些方程的根给出直线上的点，而在改变题目时，会导致具有“不可能的”根的方程，这时表示方程根的点不在这条直线上，而在另一条垂直于它的直线上。因此瓦里士作出结论，虚数值是正数与负数之间的比例中项。

可以这样解释瓦里士的几何思想：如果由点O(零)以1为半径作一个圆，那么该圆与OX轴上点A相交的一段为$+1$，与OX轴上点B相交的一段为-1，截OY轴于点C、D，给出虚数值。但是OC正好是从圆上的一个点向直径所作的垂线，即$+1$和-1之间的比例中项，或者$OC=\sqrt{(+1)(-1)}=\sqrt{-1}$(图30)。

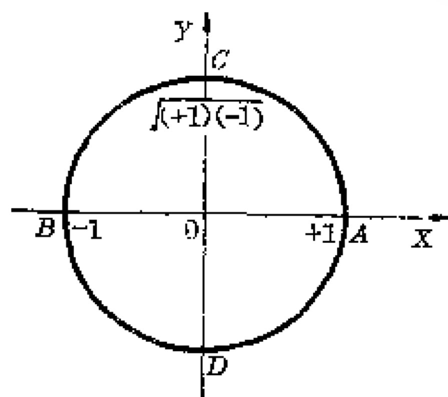


图 30

用现在的观点来看，在瓦里士的推论中包含着错误，他把OC当作直径的线段之间的等比中项，其中一条线段是正的，另一条线段是负的。而在几何定理中，由圆周上的一点向直径所作的垂线中，应该认为所有线段都是正的。

丹麦的土地测量员和数学家卡斯巴·未塞尔(1745～1818)在《方向的解析表示》(1799)著作中，首次给出平面上复数的几何解释，但是他的著作是用丹麦文写的，没有得到推广。因此以后其他数学家深入研究复数的几何表示与未塞尔无关。法国的娄叶和费朗塞以及日内瓦人阿工(1768～1822)的著作在这方面特别有成效。阿工在1806年出版了《一种表示虚量和几何作图方法的探讨》的作品。如果娄叶依据的仅是与实轴垂直的轴上的虚数理论，那么阿工用平面上的点表示复数，而费朗塞

以图形普及了这个方法。

可是，阿工和他同时代人的思想没有变成广大数学家的财富，只是在1831年伟大的高斯发展了这个思想以后，它才获得了普遍的承认。高斯把复数应用于数学的一切领域，如上所述，柯西则是复变函数理论的创立者之一，这个理论现在广泛应用于现代科学和技术的许多部门。

由于高斯奠定了曲面内在几何学的基础，他就在微分几何学方面发展了曲面理论。同时他还给出了关于这方面问题的一些公式，这些公式对于实际应用与进一步研究都很方便。

此外，高斯把自己的力量主要用在研究应用数学的问题上，即天文学和大地测量学。他在天文学和大地测量学上都获得丰硕的成果。例如高斯在天文学方面成功地利用他所造出的表“笔的尖端”，计算出谷神星的轨道，并指出它的大概位置。正是在他写出出色的天文著作之后，高斯在世界上享有声望，并获得荣誉称号“哥廷根巨人”。

在高斯概况的结尾应该提到这位伟大学者对非欧几何学（罗巴切夫斯基几何学）的思想。根据高斯与许多学者的通信集（高斯死后出版的）才开始明白，他得到存在非欧几何学的结论与罗巴切夫斯基无关。但是由于害怕人们不理解，妨碍了他整理自己的思想和把它发表.

谈到高斯时不能不谈到他的近友法尔卡什·鲍耶（1775～1856）和他的儿子雅诺什·鲍耶（1802～1860）在数学方面的活动。

F. 鲍耶在马洛斯法沙黑利城（现在的特尔古-木雷希）担任数学、物理和化学教授。他为青少年写了很多数学书。此外，他长期勤奋地研究有否可能证明欧几里得几何中关于平行线的第五公设。他曾写过一本书，在这本书中他对这个问题提出详尽的解法。但是高斯发现书中有错误，这个错误影响了这本书的全部涵义。J. 鲍耶继承了父亲对数学的特殊爱好，他同样渴望解决欧几里得

几何体系中提出的平行性问题。这个问题成为J.鲍耶整个著作中的基本内容。他成功地写出一本著作，因为这本著作在1832年曾作为F.鲍耶写的一本书的附录出版，所以在出版时该书的书名为《附录》。当这本著作寄给高斯提意见时，F.鲍耶得到了答复。这个答复不仅没有帮助J.鲍耶，甚至引起他的愤怒。对于J.鲍耶的著作，高斯写道："我不应该赞扬它，……赞扬它就意味着赞扬我自己，因为这本书的全部内容，你的儿子运用的方法，以及他所取得的结果几乎全都和我的相同，其中一部分我在30～35年以前就获得了结果。"J.鲍耶不知道，在1829年就已经出版了俄罗斯数学家罗巴切夫斯基的一部著作。在这部著作中发表了非欧几何的思想，这个思想的结论与他在《附录》中所叙述的完全一样。J.鲍耶以为"贪心的巨人"高斯欲把他的思想据为己有，以达到剽窃他的发明优先权的目的。不管怎样，即使J.鲍耶的这部著作没有使他在创立非欧几何方面得到领先的地位，但是这部著作应当看作是大数学家独创性思想的反映。这种思想在数学历史上留下了很大的遗迹。

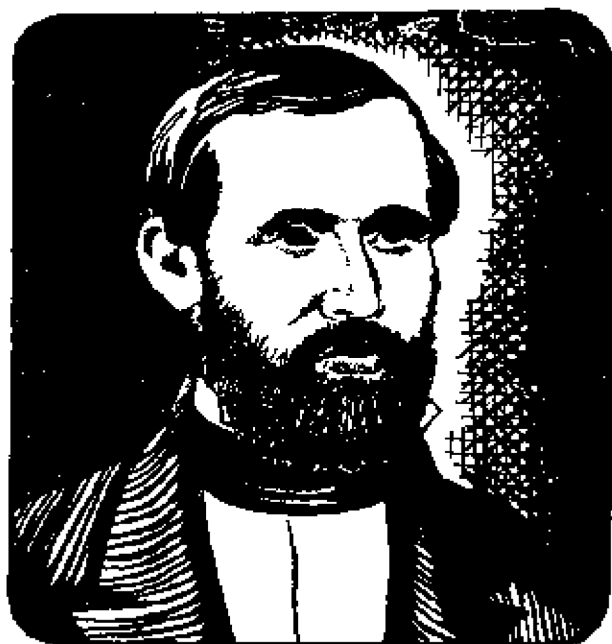
应该认为德国数学家黎曼是十九世纪伟大数学家之一，他在当大学生时，在哥廷根大学听过高斯讲课。

乔治·费里德利希·伯恩哈德·黎曼(1826～1866)是汉诺威省布列谢连兹农村牧师的儿子。他把许多新的东西带到数学的各个领域，在把数学应用到自然和物理中时，他也提出了许多新的东西。他的著作在十九世纪下半叶和二十世纪给数学的发展以很大的影响。可以认为，他是微分方程理论的创始人之一。他的论文报告《不超过已知数的质数的个数》(1859)对于发展复变数理论和解析数论具有很大的意义。顺便谈谈，黎曼在博士学位论文(《单复变函数的一般理论基础》)中研究了新学科的理论，即拓扑学。就在罗巴切夫斯基创立新的、证明可能存在其他几何学的非欧几何学的消息从俄罗斯传到西欧之后不久，黎曼研究了自己的非欧几何。

现在这种几何用黎曼的名字命名。这门几何对发展数学的其他学科，如相对论、拓扑学等确实是十分有益的。

黎曼的著作《用三角级数的方法表示函数的可能性》(1853)对积分理论和集合论，以及实变函数论都有很大的意义。

结核病过早地夺去了这位伟大数学家的生命。他死时只有40岁。



乔治·黎曼

伟大学者欧拉的活动影响到整个欧洲的数学发展，所以我们认为，介绍一些他的情况是恰当的①。欧拉的老师约翰·伯努利第一次给出不用几何形式的函数的定义。他写道："用任意方法由变量和常量组成的量叫做这个变量的函数"。如果伯努利第一次提出能不用几何形式的函数的定义，那么不用任何几何概念，也不用图形叙述函数的最初学说，是由他的天才的学生欧拉在他的著作《无穷小分析引论》中提出的。在《微分学》一书中给出了函数的定义："若某量依赖于第二个量，即如第二个量的变化也使第一个量变化，就把这个量叫做函数。"

分析克雷罗、蒙日、高斯、F. 鲍耶、J. 鲍耶和黎曼的著作，使我们确信，几何学中的巨大成就是十九世纪初叶的标志：空间曲线和曲面的研究有了很大的进步。高等数学分析为研究空间形式提供了极好的方法。在同一时期内，关于复数的解析概念获得了几何的解释，这就在研究空间方面促进了分析的进一步发展。

① 欧拉的工作在"十八世纪俄罗斯数学的发展"概述中将详细介绍。

十九世纪西欧数学发展概况

十九世纪西欧最伟大的数学家之一是挪威人尼尔斯·亨利克·阿贝尔(1802～1829)。

阿贝尔出身于芬多地方一个贫苦农村牧师家庭。从儿童时代起就显示出他在学习上有很大的才能。但是家庭的极端贫困，使他不可能受到有系统的教育。阿贝尔在科学上的成就到后来全靠他自己和一些亲近的朋友的帮助。他费了很大的周折才能进入挪威首都克利斯安那(现在的奥斯陆)的一所大学。因为阿贝尔已经对数学发生极大的兴趣，而那时候的大学根本没有数学系，所以大学里的学习对于发展他的才能来说，一点也不能提供什么条件。然而阿贝尔在边当学生边工作的情况下，他把自己整个的兴趣都集中在数学问题上。

在 1823 年阿贝尔曾一度致力于一项研究(后来才知道这是错误的)，该研究是关于如何用根号解五次方程。然而当研究的错误被发现后，阿贝尔继续在这方面研究下去，他证明了一个重要的原理，即一般形式的五次方程不可能用根号求解。也就是说，只有在特殊情况下，才可以解这样的方程。



尼尔斯·阿贝尔

这一出色的工作以及代数式积分法的论文，使阿贝尔有可能获得出国搞学术研究的奖学金。但是这一作品的命运是凄惨的。阿贝尔把

这一作品交给高斯审核，可是高斯象对一个年轻的没有经验的数学家的作品那样，对阿贝尔的作品抱有成见，因此他认为没有必要对它作出评价。

阿贝尔在国外起先住在柏林。这一段时期的生活，就创作成果方面来说，对阿贝尔是顺利的。在这里他有幸认识了理论与应用数学杂志的出版者奥古斯特·列奥波尔德·克列尔（1780～1855），克列尔对这位谦虚而又非常贫穷的青年人深表同情。他同意阿贝尔在他负责的杂志上刊登某些数学探讨的文章。

阿贝尔在柏林对幂级数的收敛性进行研究，并作出了一些著名的定理，这些定理解决了在实数和复数范围内幂级数的收敛区间和收敛半径的问题。

1826 年，阿贝尔迁居巴黎，在这里他向科学院提出一份题为《论一个非常宽广的超越函数族》的报告。可是这本出色的著作也没有引起应有的注意。著作长期搁置在柯西那里，并埋没在他自己的手稿中，直到 1841 年阿贝尔死后才发表。阿贝尔在这本著作里研究 $\int R(x, y)dx$ 类型的积分，其中 $R(x, y)$ 是 x，y 的任意有理函数，而 y 表示 x 的代数函数。这时，特别要区别下列两种情况：如果 y 表示三次和四次多项式的平方根，那么积分为椭圆积分；如果 y 表示高于四次的多项式的平方根，那么积分称为超椭圆积分。上面提到的形如 $\int R(x,y)dx$ 的积分，在数学中称为阿贝尔积分。

阿贝尔以后的生活是极为悲惨的。科学界的巨擘对他的著作（这些著作仅在他死后得到承认）所持的藐视，以及经常的贫困迫使阿贝尔于 1827 年回到祖国。但是就是回到克利斯安那他也是不愉快的。起初阿贝尔没有找到任何固定的工作，用他的话说“穷得就象教堂里的老鼠”，只能以私人授课维持生计。诚然，在 1828 年他总算在一所大学里担任代课教师，但是在这之前经常的贫困和伤心，把他的身体搞垮了：阿贝尔得了肺结核病，因此在 1829 年

4月6日，即在阿贝尔只有26岁的时候，他就病死了。一个有才华的青年的生命就这样被断送了。但是阿贝尔之死并没有丧失他在数学上的伟大思想。这些思想直到现在还具有很大的意义。其中他的一个深刻的思想也被保留下来，这个思想现在成为许多数学研究中的指导思想。阿贝尔把这个思想表示成："一个不知有无的从属关系，不要把它作为问题提出来，而应该先问一问，这种从属关系事实上是否有。"遵照这个思想，阿贝尔指出，某些类型的函数不能用简单的方法求积分。阿贝尔死后，《克列尔杂志》对他这样写道："他工作不是为自己，而是为了他热爱的科学"。

十九世纪另一位伟大的数学家伽罗瓦的命运也同样很悲惨。

埃瓦里斯特·伽罗瓦(1811～1832)出生在巴黎附近的布拉伦。还在中学学习时他就开始发表自己最初的几篇科学著作。1829年伽罗瓦报考巴黎综合技术学校，这所学校各门课程的内容，以及学生的革命传统都深深吸引着他。使伽罗瓦失望的是他没有被录取；因为对数学的浓厚兴趣，曾经使他在中学里丢下其他课程的有系统的功课，这样就大大地影响了他的考试分数①。伽罗瓦被迫进入师范学校，它实际上是中学的继续。但是在入学的第二年伽罗瓦就被学校开除了。由于伽罗瓦对法国政治生活的强烈兴趣，促使这位青年揭露了校长对1830年法国七月政变(这次政变以建立路易-



埃瓦里斯特·伽罗瓦

① 伽罗瓦参加过两次考试，两次都不及格。在一次考试中他拒绝回答对数问题，他认为这个问题太简单了。

菲利浦君主制度而结束）的两面行为。因为伽罗瓦是一个坚定的主张共和政体的人。在被学校开除之后，他立即开展积极的政治活动，参加一个秘密的共和协会“人民之友”。他说道：“假如为了唤起人民而需要死亡，我愿牺牲自己”。1831年5月，伽罗瓦在出席共和政体拥护者的宴会时，他手拿大酒杯和短剑从坐位上站起来，欢呼“路易-菲利浦”而举杯。他举杯的涵意被正确地理解了，而且还受到大多数与会的共和政体的拥护者的热情支持，而那些不愿名誉受影响的人（其中包括著名作家大仲马）都悄悄地退席了。

在这事件之后，伽罗瓦便遭逮捕，并被投入圣贝拉基监牢。法庭曾以严重的后果威胁过伽罗瓦，但是在开庭时由于法官们同情被告年轻（那时他19岁）而判他无罪。

1831年7月14日，伽罗瓦因积极参加纪念1789年革命人民的示威游行而再次入狱。

被释放后不久，伽罗瓦在一次决斗中被打死。传记作者认为，这次决斗是由他的政敌挑起的。

伽罗瓦在短暂的一生中为数学增添了完全新的思想。这些思想显著地改变了代数发展的进程，并把它引上新的轨道。

伽罗瓦在世时总共发表了五篇不长的论文，这些论文翻译成俄文大约有32页。文章的题目如下：《连分数理论中一个定理的证明》，《分析的某些要点的短评》，《分析一份关于方程代数解法的论文》，《关于数值方程解法的注记》，《数论》。

伽罗瓦两次向巴黎科学院提出自己其他的重要著作，而且这些著作交给大数学家柯西和傅里叶（1768～1830）审核，但是他们对伽罗瓦提出的著作的重要性认识不足，甚至把它们遗失了。在决斗前的一个夜里，伽罗瓦写了一封信给自己的朋友 A. 舍瓦利叶，信中说他在分析方面已经作出一些新的发现。其中一部分涉及到方程的理论，另一部分涉及可积函数。按照伽罗瓦的意见，可

以把他的著作看作是三篇论文。在阐明自己著作的实质时，他委托舍瓦利叶去找雅可比和高斯，请他们对他的著作在科学上的重要性作出结论，而不是要他们对著作中定理的正确性作结论，因为伽罗瓦对这些定理的正确性是深信无疑的。可是这些学者对伽罗瓦著名的著作也不重视，因此也没有从他们那里获得回答。只是在伽罗瓦死后14年，他的著作才由若泽弗·刘维尔(1809～1882)进行认真的研究，是他发现了这些著作的巨大意义。只在这个时候这些著作才得到发表。

伽罗瓦深入研究的主要是代数问题。用代数方程确定不可解性分类的理论是他建立的。在数学中这个理论叫做伽罗瓦理论。

伽罗瓦理论完成了一系列解高次方程的历史尝试。如果三次和四次方程是意大利学者在十六世纪解出的，那么象我们看到的那样，只是在十九世纪，才由阿贝尔证明了高于四次的方程不能用根式求解的问题，而高斯发表了二项方程的理论则要稍微早些，同时，高斯还发展了一种理论，这种理论认为有可能将高次二项方程的解法，化为低次二项方程的解法，这就使他有可能找到二次根式的二次方程可解性的准则，因而能确定作正多边形的可能性。

在伽罗瓦死后出版的《论方程可用根式解的条件》中，给出了一个未知数的方程可用根式解的一般理论，并指出解这个方程可能化成一串某些更简单的方程，同时他又说明了方程可用二次根式解的条件。

伽罗瓦在研究自己的理论时，在数学中建立了许多新概念，这些概念能使代数的研究深化。如群、子群、体等概念就属这一类。

伽罗瓦著作的成果在大量的、各种各样的数学问题上都有应用。在他的著作的基础上产生出全新的数学分支，例如对多值函数及其单值推广给出几何形式的黎曼面的概念；发展了自守函数学说，即函数的自变量经过线性分式变换其值不变的解析函数的学说。

上面我们提到过挪威数学家阿贝尔研究椭圆积分有成效的著作。德国数学家维尔斯特拉斯继续对这个问题作出研究。



卡尔·维尔斯特拉斯

卡尔·捷奥多尔·威廉·维尔斯特拉斯(1815～1897)1815年10月31日出生于奥斯坦菲城地方金库主任的家庭。他在巴阶波尔中学受到初等教育。中学毕业后进波恩大学学习。虽然维尔斯特拉斯对数学学科始终有爱好，但是大学的学习没有引起他发展数学思想的愿望：因为在波恩完全看不见纯数学课程，见到的只是与物理联系在一起的数学。他把在学的时间用来独立地研究数学问题，在这方面获得很大的成果。当他知道居住在闵斯特尔的数学家古德曼正在努力研究椭圆函数的理论时，维尔斯特拉斯于1839年迁居闵斯特尔。他在这个城市中对所谓的模函数发生了兴趣，这种函数是积分

$$U=\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

的反函数，其中k是模。

维尔斯特拉斯1841年写成《模函数的展开》的作品，这篇作品使他有可能获得中学教师的称号。从这时起，在15年内维尔斯特拉斯在德意志的各个小城市任教。在1856年他成为柏林大学的助理教授，然后从1864年起成为正式教授。

在维尔斯特拉斯生前，他的大部分著作没有发表，仅在讲课中加以叙述，因此他只有利用在大学里的讲课来传播他的思想。

维尔斯特拉斯的主要兴趣集中在数学分析问题上，并且他完全不承认这门学科中几何方法的理论。阿贝尔的积分使他更深入地研究函数。我们现在的数学分析和函数理论教程中大多数结论，是维尔斯特拉斯在研究函数时得到的。他研究了数集的界限和极限点，陈述了闭区间上连续函数必定达到其上确界和下确界的性质。他研究了解析函数的理论，这种理论的基础是把函数展开成幂级数。在级数理论中，我们拥有维尔斯特拉斯的级数绝对收敛性的准则。解析函数理论的发展，使维尔斯特拉斯有可能为某些解析函数孤立奇点有联系的问题给出根据。例如，维尔斯特拉斯定理出了名，这定理能说明存在奇点邻域中的解析函数的性质。

维尔斯特拉斯本人在分析方面所作的大量研究时，没有把他发展的理论运用到物理问题上，但是他鼓励他的学生写这方面的著作。例如维尔斯特拉斯的学生、俄罗斯著名的数学家索菲亚·华西里叶芙娜·柯瓦列夫斯卡娅把数学理论应用于下列物理问题，如解固体绕定点旋转的问题、光在晶体介质中的折射、土星环等问题。



盖尔曼·格拉斯曼

在十九世纪伟大的数学家中还有德意志数学家 G. 格拉斯曼和英国的 W. 哈密顿，他们的著作对数学进一步发展无疑也发生影响。

盖尔曼·格拉斯曼(1809～1877)最重要的著作是《延量的学说》(1844)。在这本著作中他首次引入欧几里得多维空间的概念。格拉斯曼研究的概念有：点、直线、平面、两点之间的距离，并把这

些概念推广到任意空间 R_n（就是 n 维空间）由此他发展了延量理论和度量理论。因为度量理论完全依靠算术计算，所以格拉斯曼不得不注意到算术的基础，他在《算术教科书》(1861)中阐述了他的整数理论。在这本书中他指出计算法则的特点，其中有交换律、结合律、乘法分配律。格拉斯曼的研究以一个公理为论据，这个公理在数学中叫做格拉斯曼公理。这条公理为

$$(a+b)+1=a+(b+1)。$$

格拉斯曼用超复数的方法扩大数的概念，但是应当指出，超复数不具有乘法交换律的性质。

继格拉斯曼之后，在这方面工作的是向量理论和向量计算的创始人威廉·罗万·哈密顿(1805～1865)。他在《共轭函数或者代数对的理论》(1835)一文中，详细谈到形如 $x+yi$ 的复数,并把它当作实数对 (x,y) 来研究，对它们进行有条件的按照一定法则的运算。哈密顿对这些数的研究,使他想到表示三个、四个以及其他个数的超复数。这种科学上的探求是由他的著作《四元数的讲义》(1853) 和《四元数理论的基础》(1866年哈密顿死后出版的)来完成的。哈密顿把形如 $t+xi+yj+zk$ 的数叫做四元数，其中 i,j,k 满足下列条件：$i^2=j^2=k^2=-1, jk=i, ki=j, ij=k, kj=-i, ik=-j, ji=-k$。



威廉·哈密顿

哈密顿把四元数的纯数部分即 t 叫做数量部分，而把 $xi+yj+zk$ 叫做向量部分。由此出现了向量的概

念，可以把向量看作是由坐标原点出发，到坐标为(x,y,z)的点的有向直线线段。术语“向量”也是哈密顿首先提出的。

哈密顿是有名望的力学家和物理学家。在力学上他提出最小作用量原理(哈密顿原理)。在光学中他为双轴晶体发现了圆锥内部和外部折射的现象。

哈密顿有140余篇作品。

对阿贝尔、伽罗瓦、维尔斯特拉斯、格拉斯曼、哈密顿的活动作简短评述之后，我们看到十九世纪上半叶在代数学方面即方程理论方面有重要的贡献。这个理论使种种设想为高于四次方程的解法找到一般公式的尝试就此结束。在十九世纪下半叶数的概念有相当的扩大，第一次引用向量概念，这个概念在现代具有很大意义。

第五章　俄罗斯数学的发展

古俄罗斯的数学

东方斯拉夫民族古俄罗斯、乌克兰、白俄罗斯人民的祖先，大约在公元前 2000～3000 年开始形成。这些民族的一部分很早就开始从事渔业、狩猎、收集野蜜蜂的蜂蜜，而另一部分人发展畜牧业和极简单的农业耕作。这些农副业使东方斯拉夫人相当迅速地走上经济发展的道路，到八～九世纪斯拉夫民族开始由氏族公社制过渡到封建主义制度，其间没有经过奴隶主占有制度。

东方斯拉夫民族在政治经济发展的同时，在文化发展方面也颇大程度地向前推进。东方斯拉夫人除了独立发展以外，与古代最有文化的国家罗马、希腊和东方一些国家经常直接交往，促进了文化的发展。

斯拉夫民族在与亚细亚的游牧民族和东罗马帝国顽强的斗争中，坚决地向南推进，占领了广阔的土地，它的范围是从西方的拉贝河到东方的奥卡河，从北边的波罗的海到南部的里海沿岸。斯拉夫人对东罗马帝国的军队获得不少的胜利后，分别迁移到沿多瑙河流域的地方居住，并在 626 年包围了东罗马帝国的首都伊斯坦布尔。

斯拉夫人在七世纪和八世纪有了第一批城市。当居民遭受外国人侵袭的时候，这些城市就是周围居民的堡垒，同时城市也作为公爵的府邸。手工业者和商人开始向城市聚集，因有牢固的城墙，他们的业务活动比较安全。城市逐渐地成为商业的中心。俄罗斯最初的大城市是基辅和诺夫戈罗德，这两个城市成为东方和西方

巨大的商品交易中心，它们的规模和建筑式样是欧洲最好的城市之一。

在九世纪，农业技术已经有了显著的改进，而手工业用新的方法加工铁制品和钢制品，其中分成冲制，烧蓝，制造珐琅器皿等特殊方法。

武器生产技术、原始的冶金工业、制陶艺术、城市建筑以及农业经济增长的要求，所有这一切引起了传播和掌握科学知识基础的必要性，从而出现了建立学校的渴望。

最初认为，东方斯拉夫人在接受基督教之后才有了文字，但是现代的研究，尤其是最近在诺夫戈罗德所进行的考古挖掘，都毫无疑问地证明，俄罗斯在基督教传播之前很久就已经有了自己的文字，在诺夫戈罗德发现的白桦皮文字，属于俄罗斯在接受基督教之前的桦树皮文字，可作为这方面的物质证明。

基督教使封建主义制度和公爵大臣们统治人民的地位更加牢固，同时它与多神教比较起来向前有所进展，因为它促进了东方斯拉夫民族用统一的语言、宗教和文化统一部族，确立了俄罗斯国家的统一，促进文字的推广，加强与较早就产生基督教的东罗马帝国（拜占庭）、保加利亚、亚美尼亚、格鲁吉亚、西欧各国的政治和文化联系。

斯拉夫人卓越的启蒙学者、基督教传教士、出生在（北非）太萨洛尼克城的希腊人君士坦丁（历史上有名的修道士，名为基利尔827～869）和他的弟弟密福基（?～885）于863年在克里米亚半岛的古希腊移民区赫尔松涅斯城，偶然发现了一些斯拉夫文的宗教书籍。根据这些书籍手稿中的字母，他们得以成功地编出为斯拉夫民族用的字母课本。这种字母课本得到了很大的推广。与古斯拉夫文字教育一起开始使用的还有数字的写法，这种写法是以这种字母课本为基础，在古希腊数码①规则上构成的。

① 参阅毕达哥拉斯学派的介绍。

公元十世纪在弗拉基米尔·斯维雅托斯拉维奇(? ～1015)公国时，古俄罗斯国家（基辅露西[1]）达到极度繁荣昌盛。它的文化发展在欧洲国家中是占显著地位的国家之一。在这个时代，在它的最大的城市中(基辅、诺夫戈罗德等)已经建立起各种类型的学校。除了儿童学习神学，读写，学唱宗教歌，简单计算的初等学校以外，还有授予系统教育的更高一级的学校。许多俄罗斯公爵受到比西方的国王和皇帝还要好的各种教育。特别是还把识字教育推广到小手工业者中间。许多妇女同样也识字，雅罗斯拉夫·穆德雷的孙女扬卡·符赛伏罗多夫娜首先在欧洲开办了女子学校[2]。如果中世纪上半期西欧的特点是数学知识全面下降，那么这个时期在俄罗斯，数学知识在文化普遍发展的同时，却比较迅速地普及起来。

诚然，为我们提供判断俄罗斯在九～十世纪数学发展状况的数学文献的任何古迹，都没有保存到现代，但是另外性质的文献却能够在这方面作出某些结论。

例如，十一世纪和十二世纪建立起来有名的最古老法律的汇编《俄罗斯真理》，其中就有能够判断古俄罗斯数学文化程度的某些资料。从这个文献资料中可以看出，那时的俄罗斯人已经会用整数和分数进行计算。分数主要使用于需要运用各种度量单位(例如，求部分土地的面积，或者钱币的计算)来进行计算的时候。

由于农业的发展，物物交换以及后来斯拉夫人的手工业和商业都逐渐改进了度量长度、面积、体积和钱币等的单位。但是这些度量单位并不稳定：它们的值随着时间的推延有时会有变化。

斯拉夫人最初把家里饲养的动物和它们的皮作为钱币。这时钱币的单位带有相应的名称“库安”(从貂皮一词而来)，“切开”

---

① 基辅露西(Киевская Русь)系古代的露西国家，于九～十二世纪把东斯拉夫民族统一起来。——译者注

② 欧洲其他国家在十六～十七世纪才出现女子学校。

(把貂皮切成小块),"诺加塔"[①]。

由从前的钱币过渡到金属钱币，建立两者之间相适应的新的单位制度。一个金属的(银制的)古露西的货币等于20个现金、25个库安、50个切开。因为俄罗斯银币的重量单位等于阿拉伯的单位罗特利,可见俄罗斯的银币是采用阿拉伯人的。

在更晚的时期（十四～十五世纪）卢布成为主要的钱币单位,它是被切成重量大约205克的一块白银。这个时期通用的尚有"半卢布"(卢布的$\frac{1}{2}$)、"十戈比"(卢布的$\frac{1}{10}$)、"钱币"[②](деньга,卢布的$\frac{1}{200}$)。再晚些时候出现了"戈比",在它上面有带着矛的骑马人的形象,可以认为,戈比这个名称是由此而来的。一个钱币的价值是$\frac{1}{2}$戈比，后来把一个钱币叫做铜币，有时叫做一戈比的铜币。除了上面所说的货币单位外，还有采用鞑靼人的"三戈比"("алты"按鞑靼人的意思是六)，等于6钱币或者3戈比的价值。

有些时候（在伊凡三世和瓦西里三世时）还推行了"马刀银币",由于在它上面有战争和军刀的图案,所以获得这个名称。它的价值等于一个钱币。

测量长度使用的度量单位，大部分与人的各部分的长短有关。主要的长度单位是"大拃和小拃"、"肘"、"俄丈"、"俄里"或者"活动范围"。小拃是拨开大拇指和食指的端点之间的距离，而大拃是拨开大拇指和小指的端点之间的距离。肘是从肘到中指尖的距离。俄丈[③]是中等身材的人把手向上伸直，从脚根到伸直的手的端点之间的距离。俄里在不同的时期具有不同的值，它的长短在500俄丈到750俄丈之间摆动。再晚些时期（在十六～

① 这个词来自阿拉伯，阿拉伯语"накд"表示现金。

② 钱币一词来自印度：印度人有银制的银币"таньга"。这个名称传到鞑靼人("теньга")，然后又从鞑靼人传到俄罗斯人。

③ 俄丈(сажень或者сяжень)一词来自动词"сяжать"，就是达到(俄丈就是人把任何一只手伸直时可以达到的最大距离)。

十七世纪)出现了“俄尺”(аршин)①单位,它等于 1/3 俄丈。

称量谷物使用了“卡德”(кадь,约黑麦谷物的 14 俄担)和卡德的“部分”,在更晚的时候(十六～十七世纪)以“四分之一”(黑麦谷物的 6 俄担)和它的部分代替了卡德。

由于有了谷物的度量单位，从而也形成了面积的度量单位。“四分之一”的名称是指播种一俄石黑麦种子的土地的面积，两个四分之一组成“一俄亩”。最大的面积单位“索哈”(соха)有着不同的值。因为要确定赋税的数额需用索哈来测量土地，所以一个索哈的良田比一个索哈的坏田小四分之一多一点。前者含有 800 个四分之一,后者含有 1200 个四分之一。此外，国家和村社的土地用“官方的索哈”测量，它的大小在 400 到 600 个四分之一之间摆动。小的地块用四分之一的部分来测量。

古露西银币的重量早就作为重量的基本单位，后来把这个单位叫做俄磅,40 俄磅组成一俄担(普特)。

诺夫戈罗德的修道士基利克写于 1136 年的题为《历年数字教义》原稿作品，直到现在还被认为是俄罗斯早期的数学内容的文献。

基利克在这部作品中，显露出他是一个非常熟练的计算员和伟大的数学研究者。这部作品主要是解决年代顺序上的问题，即计算过去的任何事件之间的时间。他在计算时使用了叫做小数和表示成下面名称的数字制度：10000 是季马(тьма)，100000 是列勾(легион),或者涅佛奇(неведий),1000000 是列奥得尔(леодр)②。

除了小数外，在古代俄罗斯还有大数，这种大数能够运算很大

① аршин来源于波斯的词“араш”,就是肘。

② 在斯拉夫语中，对于十的倍数形成了两种命名制度：小数，其中数的名称只限于 10^6 以内；大数或大斯拉夫数，其中包括的数直到 10^{48} 或 10^{49} 甚至于到 10^{50}。这时，同样一个名称在两种制度中却表示不同的数。例如，“季马”在第一种制度中表示数 10000，而在第二种制度中却表示百万(即一千个一千)。见高等教育出版社 1959 年版巴什玛柯娃等著《算术》第一分册第 34 页。——译者注

的数。在大数的制度里，基本数字单位具有与小数相同的名称，但是这些单位之间的关系是不一样的，也就是：

一千个一千　　　　　　是季马
季马个季马　　　　　　是列勾或者涅佛奇
列勾个列勾　　　　　　是列奥得尔
列奥得尔个列奥得尔　　是瓦朗
10 瓦朗　　　　　　　 是卡罗达

对于上面最后一个数的名称卡罗达（意为“全套”），人们说它“带有更多的人类智慧”。

用斯拉夫字母表示个、十、百时，在不同字母数字的上面放上“节略符号”҃ 作为数字与字母的区别。用表示个、十、百的字母表示千时，在字母的前面放上符号҂。例如 а҃ 表示 1，к҃в 表示 22，҂ѕ҃ 表示 6 千，等等。

仍用那些字母表示季马、列勾、列奥得尔，但是为了区别于个、十、百、千，用圈上小圆圈表示不同的单位。例如，(Г) 表示 3 个季马，(Г) 表示 3 个列勾，(Г) 表示 3 个列奥得尔。

基利克在计算一小时的几分之几时，采用了自己的分数单位制，他把$\frac{1}{5}$叫做二级小时，$\frac{1}{25}$叫做三级小时，$\frac{1}{125}$叫做四级小时，等等。最小的分数是七级小时，他认为不可能有更小的分数：“绝不会有超于七级小时的分数，即它不能从七级小时的分数里产生更小的分数，因为一天里已有 987500 个七级小时。基利克计算时运用加法和乘法，而除法想必他是用选择的方法来实现的，就是通过依次考察所给的被除数和除数的倍数进行计算。

基利克按时间顺序的主要计算是从古代俄罗斯创造世界的日期算起。他就是用这样的方法计算书写自己的著作的日期，他确

信，从创造世界的一天起已经过了79728个月，或者200涅维奇和90涅维奇以及1涅维奇和652小时，基利克用这种记法确定自己的年龄，因而我们知道他生于1110年。

基利克利用分数小时，实际上是利用了公比为5的等比数列。

基利克在著作中有一部分叙述了计算不固定的节日日期的计算表，这个问题对东正教徒是多么的重要，并且是教会人士必须解答的最难的算术问题之一。如果基利克没有提供一般类似的计算方法，那么在任何情况下，他都表明自己能作这些计算。

基利克的原著从那遥远的时代一直到今天都是唯一的数学文献。但是这绝对不是说，在那个时代俄罗斯并不存在另外的数学著作。应该认为许多手稿对我们来说是遗失了，这是因为在公爵内乱的年代里它们才丢失的，或在经常受到俄罗斯邻近一些民族侵袭而发生的火灾中被毁灭的。在档案库里细心地寻找能够找到恢复成原来状态的某些类似的手稿，这是可能的事情。

在十三世纪初期，俄罗斯遭到了骇人听闻的灾难，当时人数众多的蒙古军队从东方开来，在他们前进的道路上消灭了所有的生命。蒙古人使用了比中国北方和中亚细亚的文明民族强得多的军事力量；以断绝联络和野蛮的方式征服了这些民族，并接受了他们的军事技术装备，用加倍的力量猛烈袭击俄罗斯。当时，虽然俄罗斯人民表现出独特的英勇精神，因为国家内部互相仇视，所以没有能力给侵略者以歼灭性的回击。大家知道，俄罗斯的大部分地区陷入蒙古人权力之下，在两个半世纪期间内，俄罗斯的土地遭到蹂躏。但是俄罗斯的顽强反抗阻止了蒙古军队进一步向西方推进，从而使西方文化免遭毁灭。俄罗斯被侵占，但是俄罗斯的人民没有被征服。

征服者所造成的破坏，给正处在高度发展的俄罗斯文化带来了极大的打击。俄罗斯的古迹和文献被炮火和利剑毁灭了。同时，

在相当长的时期中国家的经济也停滞不前了。

俄罗斯南部和东部最大的城市遭到了几乎完全的破坏。大部分城市手工业者被捉去当俘虏，因此手工业遭到非常沉重的损失。俄罗斯的许多手工业过了几百年以后才得到复兴。这个时代的俄罗斯高度发展的工业被破坏了，就在那个时代西方工业才能毫无阻碍地发展起来。

当然，在俄罗斯建立起来的政治经济条件，暂时导致一般知识的低落，特别是数学。

但是，以后在莫斯科公爵的影响下，俄罗斯公国的联合和强大国家的建立，导致封建主义内乱战争逐渐缓和，然后得到停止。十五世纪末期外国的压制终于被推翻了，俄罗斯作为年轻的国家，重新走上了工业、经济和文化发展的道路。

我们知道，可以用来判断俄罗斯十五、十六甚至十七世纪数学知识的状况的历史资料相当少。能够保存到现在的只有十五、十六世纪的算术手稿。所有这些手稿几乎都是同一类型的，并不具有独特的性质。它们不过是较为迅速地提供了西欧的同类教科书的不同版本。因为这个时期俄罗斯的商业开始迅速地发展，所以算术教科书主要是供商业计算用的。在这些算术里有整数和分数运算的说明，然后阐述计算商品价格常见问题的解法，在出售货物时获得的利润按比例分配等等。其中也有用假定原则的方法，解简单的一元一次方程的某些法则。还有供娱乐用的问题，这些问题与西欧数学家（巴塞·杰·麦齐里阿克等）的问题相似。

与十六世纪有关的是发明了卓越的计算工具，这个计算工具后来获得了“俄罗斯算盘”的名称。直到现在还普遍应用的这种计算工具，结构很简单，能够相当迅速地完成算术计算。可以认为，制造这种工具的主张是斯特罗甘诺夫家族的一些俄罗斯商人提出的。他们在十六世纪末期，在卡马河一带拥有广阔的可耕土地，并主要以开采食盐为业。俄罗斯的这种算盘获得了迅速的推广，在使

用这种算盘时它获得了"木板算盘"的名称。因为这种工具是众所周知的，所以我们不准备在这里描述了。但是应该指出，因为它是用作专业计算的，所以在许多情况下算法有所变化，例如有供计算钱币帐目的。在这种计算工具的金属丝上串有9个珠子，为的是要计算10个、100个、1000个卢布；此外有两根金属丝串有9个珠子，为的是要计算三戈比（三戈比的辅币）和它的位数；串有4个珠子的特殊金属丝是作为钱币读数用的（1个钱币等于$\frac{1}{2}$戈比）；此外还有为要读三分之一和四分之一部分的金属丝。

属于这个时代的专讲代数与几何的书籍，没有保存到现在。但是那时对数学的要求显得越来越迫切。十六世纪国家的威力增强了，呈现出进一步发展军事的必要性。

俄罗斯人民高度的才能和敏锐的智慧，在勇敢地保卫祖国和建设军事装备和要塞中，在建设城市和机械设施的结构（水磨、碾米机、舂米机等），以及用木材和金属熟练地制造各种产品中，获得了广泛的应用。

这种技术萌芽，与西方和东方商业的扩大，对计算和测量问题引起了超乎寻常的兴趣。涉及军事、农业经济和建筑艺术内容的几何学实际知识，开始在书籍中逐渐地获得了地位。

例如，可以指出十七世纪的两本书：《田赋》和《炮与其他有关军事科学的战斗条例》。第一本书专讲测量土地问题，第二本书专讲战略问题。根据这两本书的资料可以在某些方面判断这个时期俄罗斯几何学知识的情况。

在《田赋》一书里，测量一些地段时往往使用了理论上不正确的计算。其根据大概是借用实际计算中的设想。这些计算相当于古埃及人的计算。例如，三角形的面积等于它的一条大边乘以小边的一半，而梯形的面积等于它两条底边的和乘以一条腰的一半。

《炮与其他有关军事科学的战斗条例》一书所研究的问题表

明，俄罗斯的几何学知识在这个时期大大优越于可以用来判断的上述的一本书。例如，这本书提供了求不可到达物体的距离和不可到达物体的高度的方法，并且这些方法运用了相似三角形的原理。

在伊凡雷帝时代俄罗斯有了印刷技术，但是印刷的第一本数学书到 1682 年才出版。无人知道这本书的作者是谁，书名叫做《买卖物品的简便计算》。正如书名所指出的那样，书的目的是简化商品交易时的计算。这本书实际上是从 2 到 100 任何数的乘积表。这种表有 50 页。象现在作类似的表那样的作法：把每一页分成许多小方格，把因数写在表的上行和左列的小方格里，而把它们的积写在与左面乘数同一行及与上面乘数同一列的小方格里。书的正文字体和表的数字是教会斯拉夫文。这本书在 1714 年印刷第二版，第二版是用民用的字体和从前错误地叫做阿拉伯数字的印度数字印出的。书的前言对书的使用作了说明。"告读者。亲爱的读者，本书可供您快速计算您所有想购买或出售物品的金额。本书每一页的顶栏和边栏的格子内，标有衡量单位和因买卖多少东西而要收付多少钱的金额。买卖了多少，在顶栏格子内可以找到，而衡量单位也可以同样在边栏内找到。如果衡量单位在顶栏内，那么在边栏里可以找到单价，把处在单价这一行与衡量单位数值这一列交叉的一个格子找出来，您就能确定：这个格子内的数字就是货物所值的戈比、铜币、银币、卢布……的数目。如果衡量单位和价格超出本书表中的数字，那么可按本书的计算方法将衡量单位和价格乘上哪怕是几千倍都可以。"

结束有关俄罗斯的斯拉夫人数学知识概要时，我们应该指出，还在十世纪时，东方斯拉夫人的数学发展很快是和农业经济和各种手工业、军事生产技术的提高有关，这种发展甚至超过了许多西方国家。但是在十三世纪，鞑靼-蒙古人的入侵，全面破坏了俄国的经济与文化。数学发展也停滞了。数学和文化进一步发展

的初步迹象只是在十七世纪鞑靼-蒙古人的压制被推翻之后才显示出来。

十八世纪俄罗斯数学的发展

十七世纪俄罗斯的文化还是颇为明显地落后于西欧，原因是长期受到鞑靼-蒙古人的压制，俄罗斯人民经常与外国干涉者进行斗争，俄罗斯没有海岸的自由通路。为了巩固国防力量，必须要有懂得军事理论的人，即军事工程师、炮兵专家、学识渊博的造船家和富有经验的航海家。为了发展采矿事业和开垦新土地，一批自修成名的"探矿员"和"新土地发现者"已经不够用了。同样也需要一批冶金工业和有系统地研究国家地理和自然资源的专家。

在国家文化和经济发展的整个过程中，在俄罗斯出现了一位杰出的国务活动家和统帅——彼得一世(1672～1725)。

彼得一世在文化建设方面所作的改革，促进了更为迅速地普及知识，从而产生了俄罗斯的独立科学。彼得一世为与根深蒂固的无知和风俗习惯中的野蛮行为斗争而采取了一些措施，虽然这些措施往往是很残酷的，但是它的目的是为了提高国家文化发展的水平，所以这些措施在科学和教育的历史上留下了深刻的痕迹。

在促进教育普及的一般措施中，应该指出彼得一世关于奠定民用字体(类似于西欧的拉丁文)的命令，这种字体要比当时存在的教会斯拉夫字体方便得多。民用的字体是从1708年开始建立的，以后除了祈祷仪式的书籍以外，其他所有的书籍都用新建立的字体印刷。为了传播技术知识和数学知识，根据彼得一世的指令，外国作者优秀的图书可以翻译成俄文。

在彼得一世时，使用更为完善的儒略历，它代替了以前存在的从神话般的"创造世界"而来的纪元。

最后，在彼得一世时开始发展了学校事业，开办了称为"算术

学校”的初等教育。在这种学校里学习的都是贵族、官吏、长官和书吏的子女，把识字、算术和几何学基础作为这些学校的主要学科。此外，彼得一世时还建立了专门的学校，培养工程技术人材和造船、领航的专家。因此，为了学习海洋知识，1701年在莫斯科开办了数学航海学校，后来在彼得堡建立了海洋科学院。同时还开办了炮兵、外科、工程技术学校。在矿业工厂里附设了专门的学校，学生在学校里熟悉矿业业务。

奥地利学者皮尤克什捷恩所写的、由Я. В.勃柳斯（1670～1735）翻译成俄文的几何学的书，是第一本以民用字体印刷的书。这本书用《斯拉夫土地测量员的几何学》的书名出版问世。

本书的译文由彼得一世用最仔细的方式亲自加以校对和修改，同时他加进了自己所写的一章：关于日晷的学说。

彼得一世时，在俄罗斯工作的杰出数学家有法赫瓦松和马格尼兹基。

恩德尤·法赫瓦松或者按照俄罗斯名字叫做安德列·达尼洛维奇·法赫瓦松（1675～1739），他参加把国外的数学书籍翻译成俄文的出版工作，他自己也有数学方面的著作。在他个人的著作中只出版了一本书，这本书是介绍计算尺和函数尺的，书中还有些法则和直角三角形解法的例子。在法赫瓦松校订下，欧几里得的《原本》首次译成俄文出版，这部著作共有八本书。这部巨著的前言出自另外一位作者的手笔。前言作为俄罗斯数学文献初步尝试之一，饶有兴趣地对数学发展的历史作出了简短的评述。

列昂季·菲利波维奇·马格尼兹基（1669～1739）是俄罗斯最早的杰出数学教育家。

关于马格尼兹基童年和青少年时代的确切报道，很少保留到现在。但是还是查明了，他于1669年6月9日出生在从前属于特维尔省的奥斯塔什戈夫斯基总主教的大村庄里。大多数历史学家认为，他是农民出身，他父亲的姓是捷利亚京。

马格尼兹基大概没有在学校里学习过，而是自学成才的。这一点可从他的墓碑题词的暗示中推断出来。题词是这样的："他用令人惊讶和不可设想的方法学习科学"。遵照彼得一世的命令，授予他"马格尼兹基"的姓。彼得一世高度评价了马格尼兹基的渊博的知识，并说，他象磁铁一样将许多知识吸引过来。的确，马格尼兹基的知识非常渊博。他堪称那个时代最有学问的人之一。

因为马格尼兹基懂得几国外语，所以他能够独立地熟悉各门科学。渊博的知识使他能够在当时进入最先进的学校，也就是在航海数学学校担任教师。后来，从1701年开始，他在那里当法赫瓦松的助手，从1715年起他成为一级教师和教导处的领导人。

马格尼兹基曾经写过一些数学著作，他的主要著作《算术，即数的科学》，在俄罗斯数学发展和数学教学法的历史上留下了极大的影响。这本书于1703年脱稿，内容不仅有算术方面的知识，还局部地包括数学其他分支的资料：代数学、几何学，甚至还有三角学。《算术》一书基本上成为当时航海学技术知识的百科全书。因此，马格尼兹基把自己的著作叫做《算术》，稍微降低了作为科学和教科书的意义。

这本著作最重要的特点是，它不仅试图阐述法则和数学问题，还用大量的例子解释这些法则。所有的叙述都渗透着这样的愿望，使学习者理解所学问题的实际应用。

整个《算术》由两本书组成：《有策略的人的或者民用的算术》和《逻辑算术》。第一本书的内容分成五个部分，第二本书的内容分成三个部分。该书用斯拉夫文印刷，但是所有的计算都采用印度读数法的数字。

《有策略的人的或者民用的算术》内容有读数法、整数和分数的算术运算、典型问题解法的法则、开平方和开立方、数列以及某些几何体体积的计算方法。

在《逻辑算术》里叙述的问题有：六十进位制分数、一次和二

次方程的解法，还介绍了天文学、土地测量学和航海学的基本原理。

在马格尼兹基的教科书里，叙述三角问题的共有9页，因为他认为三角量的概念可以直接从图中了解清楚，所以没有给出三角量的定义。但是，马格尼兹基到底还是提供了根据已知弧所对的弦，计算倍数弧和半弧所对弦的方法，以及根据已知锐角的正弦求余弦的问题。

在《算术》中发现有许多从前俄罗斯教科书中所没有的资料，在某些场合作了一些革新，这就使本书比西方相应的教科书更为先进。例如，马格尼兹基认为零是一个数，这就对当时的数学概念作出本质上的修改。在马格尼兹基的教科书里，研究了十进分数的基本概念，这些概念仅在《算术》出版以前不久才在西方教育文献中出现。在算术课程中增加代数科目是一种革新，而在外国的教科书中则没有这个内容。

至于对数，在马格尼兹基的《算术》里没有提到。然而在这本书出版的那年，即1703年，出版了弗拉哥的对数表，其中马格尼兹基也与其他一些人(法赫瓦松和格费)一起参加了这项工作。

马格尼兹基的《算术》在那时不仅作为数学教科书，而且作为包括天文学、航海学和其他科学某些章节的百科全书性质的图书，博得了很大的声望。难怪伟大的俄罗斯学者M.B.罗蒙诺索夫(1711～1765)本人学习了马格尼兹基的《算术》后，把它叫做"渊博学问的大门"。马格尼兹基《算术》一书所特有的科学和教学法的作用，保持了不少于半个世纪，而书的历史作用，根据它可以判断俄罗斯十八世纪上半叶数学教育的发展情况，则直到现在依然存在。

对于现代的读者来说，把《算术》里的数学资料叙述成诗的形式觉得好象有点古怪。但是应该回忆起，在马格尼兹基时代许多教科书都是用诗的形式来书写的。当时认为用诗的形式更容易记

住，这一点很重要，因为在教条式的教学中，许多东西都需死背硬记。此外，现在的读者对《算术》中的一些术语感到难以理解，因为这些术语现在完全不通用了。例如，数 0，1，……，9 叫做“手指”(перст)，数 10，20，……，100 叫做“索斯塔夫”(состав)，而数 11，12，……和其他与之相似的、不是零结尾的数叫做“索奇涅尼叶”(сочинение)。算术运算的名称有：加法叫做“阿季齐奥”(аддицио)，减法叫做“苏勃特拉克齐奥”(субтракцио)，乘法叫做“穆尔季普利卡齐奥”(мультипликацио)，除法叫做“季维齐奥”(дивизио)。把分数叫做“破碎数”(ломаное число)，根叫做“拉季克斯”(радикс)，表面叫做“苏佩尔菲齐亚”(суперфиция)，体积叫做“科尔普列齐亚”(корпуленция)，等等。

我们从马格尼兹基《算术》一书里摘录几个题目的原文。

1．某人购买一俄尺半的一倍半，付了两个半银币的两倍半的钱，如果买八俄尺半的八倍半，要付多少钱？答：付 20 卢布两个铜币和 $3\frac{7}{9}$ 个面值$\frac{1}{4}$戈比的铜币①。

2．某人将长为 125 尺的梯子靠到墙头上。已知墙高 117 尺。求梯脚到墙脚的距离。答 44 尺。

3．9 尺长的绳子并成双股时，能缚住36支矛。问 9 尺长的绳子单股时，能缚住几支矛？答 144 支。

彼得一世清楚地意识到，为了在俄罗斯发展和加强科学知识，必须培养出俄罗斯自己的科学家，他们能够进一步培养新的科学家和本国的几代新的科学家。由于这个缘故，他拟订了创建俄罗斯科学院的伟大规划。彼得一世与莱布尼兹一起实现了这个思想。莱布尼兹乐意着手研究科学院机构的方案。按照这个方案在1725年(彼得一世已经逝世)建立的俄罗斯科学院，迅速地发展起来了，在许多知识领域内达到了西方最有名望的科学院的水平。的

① 一卢布等于一百戈比，或者十个银币。一个铜币等于三戈比。——译者注



列奥纳尔得·欧拉

确，因为那时候俄罗斯的科学家在技术能力上还不够熟练，所以在最初的时候未能成功地将俄罗斯科学家放在科学院的领导岗位上，第一批院士是外国专家。特别成功的是，数学物理科学院选出了全体院士，其中有十八世纪最伟大的科学家之一——欧拉。

列奥纳尔得·欧拉(1707～1783)出生在瑞士的巴塞尔城一个乡村牧师的家庭里。他在巴塞尔大学受到了高等教育，在那里约翰·伯努利指导他数学知识上的修养。欧拉与约翰·伯努利的儿子丹尼尔·伯努利结成亲密的朋友。

欧拉19岁大学毕业，他在瑞士没有找到合适的工作。1727年春天他试图在巴塞尔大学填补物理教研室主任的空额未获成功。就在这个时候，在彼得堡科学院工作的丹尼尔·伯努利，坚决聘请他去俄罗斯．欧拉终于离别了祖国。他在彼得堡科学院顺利地获得了高等数学副教授的职位。然后在1731年委任他领导理论物理和实验物理教研室的工作。最后，从1733年起他领导了科学院的高等数学教研室。

欧拉在较长的时期中(从1741年起到1765年止)在柏林科学院工作，但是他在柏林的整个期间与俄罗斯保持着联系，并把自己的科学著作寄给俄罗斯，在俄罗斯有他的学生，他们的工作由他来领导。1765年欧拉重返俄罗斯，此后他就再也没有离开它了。

用简短的文字说明欧拉对全世界特别对俄罗斯科学发展的历史起了怎样巨大的作用是困难的。他的数学、物理、力学、船舶理

论，以及知识的许多其他分支的著作，可以称之为取之不尽的财富和各种各样内容的宝库。他为科学的许多新分支奠定了基础，并为推广科学和技术知识作了大量的工作。

欧拉长年累月积极地编制俄罗斯地图，就这样，彼得一世早已向往的事情终于实现了。

在科学院院士中，只有欧拉一个人乐意帮助自学成才的著名发明家И. П. 库利宾(1735～1818)编制横渡涅瓦河的拱桥设计和这项设计测试的计算。

欧拉在度量衡委员会工作时，参加研究了各种衡器的准确度。此外，他为科学院机关刊物写评论并长期主持委员会的工作，他给予科学院很多帮助。欧拉在科学院作了大量的科学工作，同时他挤出时间在大学里讲课，也在大会上公开讲演。在他各方面频繁的活动中，他也编写各个学科的教科书和科普文章。

欧拉来到俄罗斯首都一事，对他的整个活动来说，具有决定性的意义。如果他找不到俄罗斯给予他创作和发表科学著作的条件，那么这位有才华的科学家的前途怎么样就难以预料了。难怪欧拉留在柏林的时候说，自己在科学上的成就应该归功于俄罗斯科学院的工作。他指出："我们应该承认多少要归功于我们所处的良好的环境。至于我个人，如果没有这样优越的条件，按照一切症候看来，我将被迫致力于会使我神智不清的其他的科学。国王陛下(普鲁士腓特烈大帝)不久以前问我，我在那里研究体验怎么样。我按照真实情况回答说，我有责任留在彼得堡科学院。"

俄罗斯是欧拉的第二祖国，也许比瑞士更为亲近。虽然如上面提到的那样，欧拉还是有一段相当长的时间离开了俄罗斯。这是由于在比伦摄政期间，安娜女皇逝世后，在俄罗斯"事情几乎很糟"。这种情况特别影响到科学院的工作。对科学没有任何关系，但只要接近宫廷的人便被委任为科学院院士。例如，比伦子女的教师为科学院所录用。开始时，比伦的管理委员会迫使许多科学

家离开科学院。对欧拉来说，开始的情况尚算良好，因为科学院让出了空额，所以他能获得适合于他的才能和知识的职位。但是以后欧拉感到受比伦委员会的压仰，“留在俄罗斯是有危险的”。结合这一点，加上极端疲劳引起的疾病，在1736年他的一只眼睛失明了。因此，1741年普鲁士国王腓特烈建议欧拉转到德国柏林科学院去工作时，欧拉没有特别的犹豫就同意了。但是，俄罗斯的情况一有改变，欧拉遵照叶卡琳娜二世的邀请，重新回到彼得堡，在彼得堡用毫不松懈的精力一直工作到自己生命的结束。虽然他抵达俄罗斯时完全有病，并且不久他的第二只眼睛也失明了，尽管双目完全失明，但是他的巨大的才能和特殊的记忆力，仍然使欧拉能够继续各种不同方面的和范围广泛的工作。

欧拉留下的科学遗产非常巨大。毫无疑问，他是十八世纪最卓越的数学家之一。著名的数学家、天文学家和力学家拉普拉斯说：“请读欧拉的著作，这是我们大家的导师”。

欧拉前14年在俄罗斯科学院的出版物中，发表了大约70部著作，在俄罗斯整个工作期间，他共发表了473部科学著作（书和文章）。欧拉所写的科学著作总数达到865部（篇）。

欧拉的大多数著作是属于分析方面的，这些著作对发展数学的这个分支具有特别重要的意义。

从上述简单介绍的一个方面，我们已经提到欧拉是一位新的先进的函数概念的缔造者。他基于量的代数关系给出了函数概念的新定义，当时在他之前函数只表示为几何的关系。函数的严格分类是由他作出的。欧拉在《无穷小分析引论》、《微分学》和《积分学》著作中，叙述了数学分析的典型实例，广泛地运用了算术化的方法。在分析的著作中，他更多地注意把函数展开成级数的问题和连分数的学说。值得一提的是，欧拉在发展微分方程积分法中有着巨大的贡献。此外，欧拉推导出三角函数和指数函数之间关系的著名公式。以这些公式为基础，整个三角学可以用解析的方

法而不用几何作图建立起来。这些公式就是

$$\cos z=\frac{e^{zi}+e^{-zi}}{2},\ \sin z=\frac{e^{zi}-e^{-zi}}{2i},$$

$$e^{zi}=\cos z+i\sin z。$$

在数学里，这些公式叫做欧拉公式。

欧拉运用无穷级数和上述公式，建立了无穷级数和无穷乘积之间的关系。特别是，欧拉在实践中引用的符号 π 和 e 得到完全承认，它们用来表示圆周长与直径的比以及当 n 趋近于无穷大时 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 所表示的极限。除上面指出的那样，必须看到，欧拉在这些著作中深入研究了下列代数问题：把分式的分子和分母有理化，展开成最简分式，以及代数函数的一些其他情形的变换。

欧拉在数论方面的著作超过 100 本，他在这门学科中的许多公式保持到我们这个时代。例如，具有实际意义和理论意义的欧拉数论函数 $\varphi(N)$，表示小于 N 且与 N 互质的数的个数。它由公式

$$\begin{aligned}\varphi(N)&=N\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{e}\right)\\&=a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\cdots l^{\lambda-1}(a-1)(b-1)(c-1)\cdots(l-1),\end{aligned}$$

计算，其中 $N=a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots l^{\lambda}$。

表示已知数 N 的约数之和的公式很有趣：

$$\begin{aligned}S(N)=&[S(N-1)+S(N-2)]-[S(N-5)+S(N-7)]\\&+[S(N-12)+S(N-15)]\cdots,\end{aligned}$$

其中，如果 n 是方括号中各项的序数，那么圆括号里减去形如 $M=\frac{3n^2\pm n}{2}$ 的五边形数。

在质数分布问题方面，欧拉提出下列可以得到质数的公式：

1. $p=2x^2+29$。当 x 为自然数时，这个公式给出29个质数。

2. $p=x^2+x+41$。当 x 为自然数时，给出41个质数。

3. $p=x^2-79x+1001$。当 x 为自然数时，给出80个质数。

欧拉从青年时代起早就显示出对极值方面的问题很感兴趣。他解决了这种类型的问题后，为分析的新分支变分法奠定了基础，他被认为是变分法的创始人。他解决了与力学问题有关的量的极大值和极小值问题，并写出关于等周问题的论文。

欧拉在普及基础知识方面也有很大的功绩。他编写了初等代数和算术的教科书。这些教科书的特点是，考虑周密细致、叙述有条有理。在这些教科书里抛弃了许多从前塞满在教科书里的多余的或者陈旧的概念。同时用完整的科学的严肃性和大量的教学法技能来叙述课程最重要的章节。在各个章节里，可以找到许多新的思想和叙述方法。例如，在算术里，它的叙述第一次附有必要的证明或者最低限度地附有解释。在代数里，对数的一章是完全按照新的叙述方法进行的。欧拉定义对数的方法是：为了得到给定的数，应该作底数的某个幂，这个幂的指数就叫做对数。因而欧拉建立起取对数是关于乘方的逆运算。他还引进术语"尾数"和"底数"。与之有关的应该提到，欧拉首先建立起复变数的对数函数的多值性。

虽然欧拉没有写出初等三角学的专门教科书，但是在发展这门学科中，他的作用非常巨大，这是由于欧拉的三角学具有符合现代三角学要求的特点。在《无穷小量分析引论》和其他许多著作里，在论及到不管怎样的三角问题时，欧拉都给出了正弦和余弦的概念，以及作为函数的另外的三角值，建立起用解析公式表示的三角函数之间最简单的关系式。其次，欧拉对整个三角学作出了分析性的研究。在欧拉以前，每个公式仅从图中推出，大部分以叙述表达。欧拉证明了，全部三角公式都能从最初几个公式解析地推导出来，而不必求助图形。他还顺利地获得了某些从前不为

人所知道的公式。欧拉首先研究了三角函数四个象限的符号，并给出了简化的公式。因为欧拉采用现代的方法，用小写字母 a、b、c 表示三角形的边，用对应的大写字母表示这些边所对的角，所以使公式的写法大大简化。应当注意到，我们提到欧拉获得的著名公式，使三角函数与指数函数结合起来，能够把三角学建立在与几何学完全无关的基础上。因为三角函数自变量的意思不只是角和弧，而不管是那一个量；这就能把三角学应用到各种各样的问题上。

可以认为，欧拉的著作使三角学的发展进入完成阶段。

俄罗斯最初的数学学派的创始人应该是欧拉，因为他独创性的科学和教学法思想被许许多多学生所接受，并且在这些学生中，许多人后来成为天才的数学家，他们多方面地发展和传播了欧拉的思想。

科学院院士 C. E. 古尔叶夫(1764～1813)是欧拉数学学派有名望的代表。他在微分几何著作里创立了用极坐标的研究方法，并获得载入微分几何理论的一系列公式。改进数学教学及建立和深化数学学科基本概念，特别是对几何学和数学分析的问题，在他的研究中占着很大的地位。他的著作《关于完善几何原本的尝试》一书，被数学历史学家评定为俄罗斯哲学和数学教学法的初期作品。

某些数学家也促进了欧拉思想的传播和对教学法的整理，但是这些数学家不是欧拉直接的学生，不过在他们的著作里是以欧拉的思想作为根据的。例如，马格尼兹基的学生 H. Γ. 库尔加诺夫(1725～1796)教授就属于这样的人。他的名为《通用算术》的教科书获得了很大的声誉。他的另一本书《通用代数》，结构上很象欧拉的算术教程，但是似乎有了进一步的发展。

欧拉之死对整个科学世界是巨大的损失。纪念他，对我们苏联人民来说，尤为可贵。因为我们意识到，为了发展俄罗斯的科学

和教育，这位伟大人物的整个活动，他的毕生精力都贡献给孜孜不倦的工作了。

十九世纪俄罗斯数学的发展

十八世纪中期是俄罗斯封建主义农奴制关系开始瓦解的时代。这一点充分地显示出来是在十八世纪最后三分之一的年代里。当时是以农奴制的生活方式为背景，由于商品货币关系在自然经济中的地位有所提高，开始形成了资本主义制度。内部和外部市场的发展，逐渐地迫使地主由自然经济转变为市场关系，这一点同样地促使他们加强剥削农民经济，削减本来就为数不大的农民的份地[①]而使用贵族的耕地。在这个时期中更加剧烈地奴化农民，农奴的数字有大幅度的增长。

资本主义关系的增长在大商人工场手工业的产生中显示出来了，这些手工业卓有成效地与贵族的手工业进行了竞争，在贵族的手工业中不由自主的农民劳动，不可能作出较高的生产率。

商人工场手工业和商业(渔业，盐业等)的城市雇佣工人，以及根据商人的定货而操作的手艺人的处境，比农民的情况好不了多少，因为从属于贪婪的雇主(他们通常是高利贷者)的，有损自尊心的依赖地位威胁着劳动人民。

这样一来，国家生产力的增长，强大军事力量的巩固，都需加强对劳动群众的剥削。这种情况引起了阶级矛盾的尖锐化，产生了反对地主的激烈的农民战争，爆发了工场手工业和官方工厂工人的风潮。

农民战争动摇了农奴制度，激起农奴主和他们的拥护者以及庇护者疯狂的反抗，同时唤起了当时优秀人物的社会进步思想。因此，与农民运动同时，在俄罗斯先进的思想家中间，进步的唯物主

① 是指革命前由地主或村社分给农民的土地。——译者注

义哲学得到了加强和巩固。俄罗斯唯物主义哲学的奠基人，应该认为是最伟大的天才 M. B. 罗蒙诺索夫。十八世纪末俄罗斯的唯物主义哲学家采取机械唯物主义的立场，自发地接近辩证法的世界观。十九世纪初，A. H. 拉季谢夫（1749～1802）革命的唯物主义哲学为 B. Г. 别林斯基（1811－1848）和 A. И. 赫尔岑（1812～1870）思想的产生作了准备。俄罗斯的自然科学同时还有数学，都得到了牢固的唯物主义基础，从此时起，唯物主义就成为俄罗斯大多数数学家主要的基本哲学了。

季莫菲·费多罗维奇·奥西波夫斯基

多才多艺的俄罗斯科学家、唯物主义哲学家、数学家、物理学家和天文学家奥西波夫斯基，在俄罗斯的数学发展中发挥了巨大作用。

奥西波夫斯基（1765～1832）出身于以前的弗拉基米尔省奥西波沃镇农村牧师的家庭里。

奥西波夫斯基最初在弗拉基米尔宗教进修班学习，他是这所学校中最有天才的学生。当彼得堡开办了俄罗斯第一所师范学校时，他便从宗教学校转移到这所培养教师的学校。奥西波夫斯基在 1786 年毕业于该校以后，获得了数学课程教师和主管莫斯科学校俄国文学的职位。在这里他成为极有天才的教师和善于思考的科学家。奥西波夫斯基在高等国立学校里工作了 14 年。在这个期间他形成了坚定的唯物主义信念，这个信念在他的一生中仍然是正确的。奥西波夫斯基在 1795 年庆祝学校开学典礼上的讲演，第一次公开说出自己的信念。这次讲演的题目是“论科学的作用”。奥西波夫斯基的发言是批评没有根据的唯心主义学说，这种学说造成对大自然的歪曲，并不切合大自然的实际状态。他介绍走实验和观察的道路，认为这条道路是唯一正确的，也就是走向真理的、唯一有效的道路。



T. Φ. 奥西波夫斯基

1800年，奥西波夫斯基担任彼得堡师范学校的教师，他从前就是在这所学校里学习的。他在这里任教到1803年，同时他还编写了获得广泛声誉的两次再版的《数学教程》一书。

从1803年到1820年奥西波夫斯基担任哈尔科夫大学的教授，并且成为几乎整个数学课程，包括物理学和天文学的主要授课者。同时(从1813年起)担任这所大学的校长。

奥西波夫斯基写有许多科学著作，有物理学、力学和天文学。这些著作是以他的唯物主义观点为基础的。在奥西波夫斯基科学的哲学著作中，他的唯物主义哲学具有特殊的意义，主要是批评康德的唯心主义观点。他的两篇公开的演讲就是属于这种类型的作品，两篇演讲的题目是“论空间和时间”(1807年)和“论康德的动力系统”(1813年)。

奥西波夫斯基赋有罕见的清楚和引人入胜地表达自己思想的才能。这种情况在很大程度上促使他的唯物主义思想生动地被拥护者——哈尔科夫大学的学生们所接受。

这个情况使宗教神秘主义流派的代理人警觉起来，他们在亚历山大一世朝代的下半个时期，主持了与宗教事务部合并的并由露骨的反动分子 A. H. 戈利津公爵领导的人民教育部。

1817年被委派为哈尔科夫教育地区督学的戈利津的帮凶 З. Я. 卡内叶夫寻找借口，以冀免除奥西波夫斯基大学校长的职务。1820年出现了一个好机会，当时奥西波夫斯基已经有了养老金，

他呈交申请书，要求免除他在大学的部分职务，也就是免除纯数学的教研室工作。他打算把这个教研室工作让给巴夫洛夫斯基教授。但是卡内叶大这样呈报了这件事情，好象奥西波夫斯基请求解除他在大学里所有的工作。就这样把这个情况呈交给戈利津部长，这位部长有充分准备地免去了奥西波夫斯基所有的职务。

奥西波夫斯基失去大学工作以后，已经不担任政府方面的任何职务，完全致力于科学工作，在莫斯科度过了晚年。

奥西波夫斯基的科学著作和教学法著作，对发展俄罗斯的数学具有很大的意义。他的巨著《数学教程》作为经典载入数学史册。这部著作的前两卷在 1801～1802 年出版，第三卷在 1823 年出版。《数学教程》吸收了很多资料，内中叙述了初等数学的定理和高等数学的各个章节，直到变分法。这套教科书具有全面的、当时存在的任何数学教程所不具备的内容。书中第一次叙述了高等数学的问题，叙述了计算方程的根的方法，后来这个方法命名为"戈尔涅方法"，但是戈尔涅（1768～1837）发表自己的方法要比奥西波夫斯基迟17年。奥西波夫斯基所写的但是没有发表的第四卷教程，包括解析函数对于曲面曲线理论的应用。

奥西波夫斯基的《数学教程》，就叙述的教学法意义上来说，在当时是很出色的，吸收的资料是广泛的，以致该书被译成西欧的几种文字，并在国外享有很大的声誉。

尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基

十九世纪科学家中伟大的几何学家、我们俄罗斯祖国科学的骄傲——罗巴切夫斯基，他以自己独创性的著作而出类拔萃。

罗巴切夫斯基（1792～1856）诞生在下诺夫戈罗德城一个担任测量土地的谦逊的账房家庭里。我们不知道他父亲死亡的时日，但是我们知道，由于他父亲患有严重的疾病，1800 年不得不放弃了工作。以后的情况我们就不知道了。



Н. И. 罗巴切夫斯基

罗巴切夫斯基的父亲离职以后，家境非常困难。1802年，罗巴切夫斯基的母亲普拉斯科芙娅·亚历山大罗夫娜把三个儿子（亚历山大、尼古拉和阿列克赛）安排寄宿在喀山中学住读，开始时他们在那里都是自费的，后来转为国家公费抚养。从这时起罗巴切夫斯基的生活始终与喀山连接在一起。

罗巴切夫斯基用4年时间结束了中学里的课程，中学毕业以后，从1808年开始他成为在1804年开办的大学的学生。

罗巴切夫斯基在中学学习期间，他在有才能的教师 Г. И. 卡尔塔舍夫斯基指导下学习数学，中学里的学习促进了他发挥天赋的才能，并对这门科学发生了兴趣。当时他在大学里，在象巴尔捷里斯、勃罗涅尔、利特罗夫教授这样的著名教育家领导下，能够研究数学系的各门课程。罗巴切夫斯基创造性的力量为自己的发展获得了更为广阔的视野。

1809年罗巴切夫斯基已经在数学上取得了优异的成绩，被提升为学生的室长，负责为其余的学生讲解他们在课堂上不理解的内容和帮助功课落后的人。但是罗巴切夫斯基具有生动活泼的气质，经常违反纪律。这就迫使大学的主管人员在1810年初剥夺了他的室长职务。在以后的几年间，罗巴切夫斯基由于在科学上作出了出色的成就而引起一些教授的赞赏，然而，他从主管人员方面受到的好感却越来越少。主管人员认为，他除了平常违反纪律之外，还有极为有害的思想："罗巴切夫斯基在很大程度上表现出无

神论的特征”。尽管大学的主管人员持恶意态度，但是教授们知道罗巴切夫斯基的特殊才能和他在数学学科方面出色的成就，他们坚决主张在罗巴切夫斯基大学毕业之后授予他硕士学位。他的学位是1811年8月3日授予的。从1814年开始，罗巴切夫斯基已经独立讲授大学的课程，1816年有人坚决主张给以额外教授的头衔。在1814～1815学年中他讲授数论，在下一学年讲授初等数学，平面三角学和球面三角学，初等几何与微分几何。后来罗巴切夫斯基教授的课程范围，除了数学、物理、力学和天文学外，还有所扩大和发展。

从大学工作的最初几年开始，罗巴切夫斯基就积极参加师范大学中有组织的活动，它的目的是为喀山教育区学校培养教师。此外，罗巴切夫斯基在1818年已经被推选为校务委员会的委员，成为大学里最积极的工作人员。根据1804年的条例，他在那时的管理委员会中，事实上对整个的管理和对喀山学区各学校的教学进行了指导。

1827年大学委员会推选罗巴切夫斯基为大学校长，他在担任校长的19年期间，不仅显示出卓越的行政管理的才能，而且具有独特的教育家的天才，这使他能够成为大学委员会所进行的整个教师工作中思想上的鼓舞者。

罗巴切夫斯基在大学里一直工作到1846年。那时他理应离开这个工作，因为按照大学委员会的条例，在大学里工作30年，这是教授的讲坛职务最高的期限。罗巴切夫斯基已经超过期限规定的年数。虽然大学委员会通过决议，他由于特殊的光荣，应该受到尊敬，今后在教授中间仍然是位出色的科学家和富有经验的教育家。但是他本人在给人民教育部的声明中，请求免去他主持数学教研室的工作，让位给他的大学里的学生A. Ф.波波夫，作为自己合适的接替人。这种真诚的将科学和教育的利益放在高于一切地位的教育家的崇高形象，显示了罗巴切夫斯基热爱事业的高尚品德，阅

读过他的申请书的人无不心情激动，并对罗巴切夫斯基表示由衷的尊敬。他写道："去年获得博士学位的喀山第一中学教师波波夫，领导数学教研室的工作将会更有效益，他的这种提升，不仅完全是应该的，而且是理所当然的，其目的是鼓励做好今后的工作，发挥他显而易见的很好的才能。由于他还年轻，不象我那样为其他许多工作和家庭琐务而分神，他会迅速地表明自己是不愧为教授的，并将跻身于欧洲最著名的学者之间。在这种情况下，保留我教授职位的愿望不能认为是正确的。"

罗巴切夫斯基的申请书被教育部利用来作为借口，不仅免除他主持教研室的工作，而且还违背他的愿望，免除了他在大学里的所有职务。免除职务的原因是，思想进步的罗巴切夫斯基在关心大学科学的发展中，保持着非常独立的精神，对教育部下达的命令并不总是遵照命令的字面上的意义去执行，而只是遵照委托他负责的学校的利益来主持工作。对于人民教育部来说，有一个顺从的人担任喀山大学的校长要方便些。这样的人已经预先拟定，准备提升И. M.西蒙诺夫教授(1794～1855) 去接替罗巴切夫斯基的工作。罗巴切夫斯基被建议担任喀山教育区督学的助手。虽然罗巴切夫斯基能够运用他在中学教学的和教学法的才能从事新的工作，但是他已把一切力量贡献给大学，要摆脱大学里心爱的工作，使这位伟大的学者感到心情沉重，他直到生命的最后时刻都不能顺从这个没有根据的决议。

督学助手的职务是罗巴切夫斯基所担任的最后的官方职务。罗巴切夫斯基于 1856 年 2 月 12 日(旧历)与世长辞。

介绍罗巴切夫斯基科学的和教育的思想，对于我们来说有特殊重大的意义。他的大胆行为使我们感到惊讶不已，当时的大学情况昏暗，罗巴切夫斯基初期的教学活动就是在这种境况下不得已地开展工作的。

与十八世纪末法国唯物主义者的思想同时深入到大学里，并

在法国1789年～1794年资产阶级革命的影响下壮大起来的"自由思想"，遭到了从世界反动派方面来的猛烈的反抗。在1812年的卫国战争以后，俄罗斯皇帝亚历山大一世采取了最为反动的立场。在政府的范围内由宗教神秘主义的观点控制着，象上面所述及的那样，以东正教事务管理总局首席检察长、极端反动分子戈利津共同管理的名义下，人民教育部曾与宗教事务部合并。这与在哈尔科夫大学进行的一样，当T. Φ.奥西波夫斯基在那里工作时，俄罗斯的全部大学里已经开始检查教学和科学问题的安排。指派受到戈利津无限信任的 M. Л. 马格尼兹基[1]检查喀山大学。

马格尼兹基于1819年2月来到喀山大学。于是他就把颇大的一部分教授赶出去，命令学生按照修道院方式生活。应该根据"宗教的启示"叙述一切科学。希望博得长官欢心的教授，时常在讲课中卑躬屈节地仿效这些命令，用完全错误荒谬的知识代替了科学知识灌输给学生。但是罗巴切夫斯基没有这样做，他对马格尼兹基的行为没有给予明显的反抗，因他懂得，在那种情况下反抗也是徒劳无益的。但他从来也不卑躬屈节地去迎合马格尼兹基，也不歪曲他给大学生们所讲的大学课程。

罗巴切夫斯基在这些岁月里，仔细研究并写出了许多科学著作和教学法著作，这些著作成了他以后工作的基础。

对罗巴切夫斯基来说，几何学基础的问题是思考教学法性质的主要科目。罗巴切夫斯基发现，教授数学时必须叙述精确、严格，所有的概念完全清晰。数学课程都是以概念作为根据的，特别是几何学。欧几里得几何学的整个缺点是，从作者著书时开始，在两千年的期间内，叙述上的所有缺点都没有变化。罗巴切夫斯基对许多地方的叙述感到困惑，看来他尤其是对平行线的公设不能同意：公设既不是显而易见的，也没有足够的证明，然而初等几何

---

① M. Л. 马格尼兹基与《算术》的作者 Л. Φ. 马格尼兹基没有任何的关系。(B. Д. 奇斯佳科夫注)

学的整个学说又好象要依靠这个假设。因此数学课程教学叙述的基本要求遭到破坏，即丧失理论的严格规则和失去合乎逻辑的叙述。

显然，从罗巴切夫斯基不得不讲授初等几何学课程起，几何学正规课程教学的理论问题引起了罗巴切夫斯基的兴趣。无论如何，从罗巴切夫斯基的听讲者在 1816～1817 年所写的听课笔记中可以看出，在这些年月里，罗巴切夫斯基已经不满足于欧几里得的关于平行线相当复杂的公设作为几何学的基础。因此罗巴切夫斯基已经在自己教学活动的头几年中，打算把这个公设作为定理来证明。

当然，使严格要求的教学法专家罗巴切夫斯基在叙述初等几何学教程时感到困惑的不仅是一个平行线公设问题。罗巴切夫斯基认为，叙述几何学的整个程序以及几何学的整个结构都已过时，他在 1823 年编出了自己完全新颖的几何学教科书，新教科书叙述的特点是摆脱了欧几里得的传统。罗巴切夫斯基在几何学的定义中表明了教科书结构的基本思想，他在教科书的第一句话中写道："在纯数学中，研究度量几何空间的方法的部分，叫做几何学"。因此罗巴切夫斯基认为，几何学的任务是去度量在空间中所含的量。根据这一点，他在整本教科书中只谈到度量，并且在叙述这种度量的理论时，只采用必需的定义和起公理作用的假设。在罗巴切夫斯基的教科书中，没有通常几何学中习惯划分的公理、定理、引理等等。叙述是从度量直线开始，并说明应该理解这些过程。罗巴切夫斯基的度量曲线与度量直线直接有关。在这种情况下，他建议用米和米的十分之一、百分之一、千分之一等作为度量的单位。为了度量长度使用米，而进一步为了度量角，使用了直角的百分之一。在俄罗斯出现了这种新制度，评论罗巴切夫斯基《几何学》的科学院院士H.富斯 (1755～1826) 把这种新制度看作是革命狂怒的表现。

在度量曲线弧的长度、曲面的面积、某些物体的体积时，罗巴切夫斯基使用了数学分析的近似方法，他在任何一本几何学中也没有引进无穷小量的概念，然而在许多证明中是使用无穷小量的。尽管罗巴切夫斯基没有为无穷小量取一个专有名称。

罗巴切夫斯基在几何学教程中，始终把立体几何问题穿插在对应的平面几何问题后面讲解，这种编写原则后来叫做融合法。在现代中学教育实践中应用这种方法的效果不佳，但在罗巴切夫斯基的《几何学》里，融合法却是很自然的，因为它从推广的愿望出发，把平面上和空间中具有同类度量特性的问题归并到一起，这就使罗巴切夫斯基的几何学教程特别适合大学一年级学生阅读，而且能对中学课程里的材料加以浓缩。在这个意义上，罗巴切夫斯基的想法在当时是先进的，而且其内涵与后来重操融合法的教学法专家们相比，也显得丰富得多①。

在罗巴切夫斯基《几何学》的优点中，应该指出一点：在某些情况下，当介绍新的空间概念时它没有马上给出枯燥无味的形式化的定义，而是事先说明实际建立新形式的可能性。此外在罗巴切夫斯基《几何学》里有一些空间作图题解法的例子。

至于涉及平行线的理论，罗巴切夫斯基在《几何学》里认为，任何人也没有给出公设的严格证明（因之也包括罗巴切夫斯基本人），“已给出的哪些只可以叫做说明，在完整的意义上说尚不能称之为数学证明”。罗巴切夫斯基通过研究平面无限延展而对平行公设所作的说明，比法国数学家别尔特朗提出得更早些。

没有根据的平行线公设，促使罗巴切夫斯基越来越看清楚几何学基础的重要，最后终于得出放弃使用欧几里得形式的公设，而

---

① 提起罗巴切夫斯基的融合法，必须着重指出，虽然欧几里得已经用过这种方法，把一切与平行公设无关的几何材料集中到《几何原本》的开始部分，但是在罗巴切夫斯基手中，这种融合法被发展得更完备、更彻底。此外，看来罗巴切夫斯基把这种将平面几何与立体几何融为一体的写法作为编写概述性教材的一种处理方法，这就是他的教学指导思想。（B. Д. 奇斯佳科夫注）

用另外的公设予以代替的思想。按照罗巴切夫斯基的公设，在平面上给定一条直线和直线外的一个点，过这个点可以作无限条直线不与给定直线相交。这个思想是罗巴切夫斯基在他的建立起最伟大的几何学荣誉的一系列著作中体现出来的。因此，他对教学法的探讨，获得了出色的，开创几何学发展新阶段，作为人类研究和征服周围世界新方法的科学结论。同时罗巴切夫斯基的科学著作，除了发展非欧几何的直接作用外，还在发展力学、物理学和哲学事业中获得了巨大意义。

在罗巴切夫斯基写的一部著作中，叙述了他的新思想，为了发表这部著作，1826 年 2 月 7 日他把它提交给大学数学物理系，2 月 11 日听取意见，并委派了评论家。这本用法文写成的著作书名为《平行线理论和几何学原理概论及证明》。罗巴切夫斯基指出，他在 1826 年 2 月 12 日系的会议上念过这本著作。非常遗憾，这部书的原文没有留到现在，我们仅从他最后的著作《几何学原理》中知道他在这部著作中所叙述的思想，它以后成为上述《几何学原理》一书的第一部分的内容。

应该指出，无论是独特的著作《几何学原理》，无论是罗巴切夫斯基的《平行线理论的几何学探讨》，都发表在《喀山通报》杂志上，前者在 1829 年第一次刊登，后者在 1840 年出版。我们找到这样的证据：罗巴切夫斯基希望建立起在教学法的意义上无可指责的几何学，这也就是促使他革新几何学的主要原因。

因此，在《平行线理论的几何学探讨》著作中，罗巴切夫斯基写道："我发现几何学里一些不完善的地方，我认为这些不完善的原因是，这门科学没有成为分析法，直到现在，从欧几里得到我们现时代一步也没有超出原来的范围。我把这些不完善归结为：几何量的重要概念模糊不清；我们用以度量这些量的方法；最后还有平行线理论的重要遗漏，直到我们现时代，用数学家的整个力量补充这些遗漏仍然是徒劳无益的。"

关于几何教学原则中的那些缺点，在 1824/25 和 1825/26 学年，罗巴切夫斯基在《纯数学教学评论》中更为明确地提出自己的观点："我们的关于事物本性的第一个概念，它一旦被获得，就将永远保持下去，它们与每个理性观念是分不开的，并作为对事物下任何判断的重要基础，几何学的基础也应该是这样。其次，把初步的概念直接应用于自然界，然而这些概念有别于合成的概念，合成的概念势必有其他的概念，不管它们的来源如何。在自然界不存在曲面和线，它们仅在想象中存在，因为它们必须以物体的属性为前提，对物体属性的认识必然会使我们得出曲面和线的概念。""但是，物体以及与我们在自然界中，为了取得曲面和线的学说而所了解到的其他的度量之间的差别在哪里呢？"罗巴切夫斯基提出了这个问题并自己作了回答："任何一种几何学都尚未提到过这一点。"

罗巴切夫斯基在规定几何体之间接触或者相切的基本性质时，试图回答这个问题。他在自己的初等几何里引进了这一性质，并建立起"想象"几何学的整个宏伟的大厦。罗巴切夫斯基从物体接触概念中推论出三维空间的概念。

除了研究几何叙述中的缺陷以外，罗巴切夫斯基还把它归结为"暧昧不明的原因有两种：第一种，在整个度量中不应该确定法则；第二种，想要保持完美性，然而几何的真正目的并不要求如此。"所引用的罗巴切夫斯基的话，使我们再一次相信，他给空间度量问题增添了巨大的意义，他要求教学要真实地了解周围现象，不要把周围事物的现象认为是完美的，认为它们象真实存在的物体的几何形状那样的完美。

罗巴切夫斯基将下列公理规定为几何学的基础，按照该公理，过平面上直线外每一个点，有两条与所给直线平行的直线（这里平行线是指这样的直线，它们把通过该点的所有的直线分隔成两组，其中一组与所给直线相交，另一组与所给直线不相交），据此罗巴切夫斯基建立起自己的几何学，在他的几何学里，有许多原理在很

大程度上与欧几里得几何学的原理有所不同。例如，在罗巴切夫斯基的几何学里，由直线外的任何点向这直线作垂线，垂线与平行于已知直线并通过已知点的直线组成的角不等于直角，且小于直角。这时的角叫做平行角，点离开已知直线越远，平行角偏离直角越多。因而平行角是点到直线距离的函数。根据罗巴切夫斯基几何学的假定还推出：三角形内角和小于两直角，并且当三角形面积越大时，内角和偏离两直角越多。由此作为直接推论，必然断定，相似三角形不可能存在。对应角都相等的两个三角形只能是全等三角形，即具有相等的对应边。这样一来，罗巴切夫斯基的几何学与欧几里得几何学就存在着本质上的区别。可是这一点还不完全如此。应该认为，欧几里得几何学只是罗巴切夫斯基几何学的特殊情况，或者甚至是极限情况。因为在欧几里得几何学里认为是直角的平行角，而在罗巴切夫斯基几何学里可以明显地看出，当距离的量和某些固定的线段比较起来不过于小时，这种平行角则偏离了直角。据说罗巴切夫斯基把这种线段描述为空间的曲率半径。如果这种线段很长（曲率很小），那么只有当距离很大的时候才可能发现偏离直角，这些距离在物理空间的场合将大大地超越人们通常所能遇到的那些情况。因此，为了用实验检查这种偏离，应该在天文距离范围内进行观察。罗巴切夫斯基试图利用在那个年代由设备最为完善的天文台所进行的和公布的天文观测最精确的资料，去完成这次观察。结果罗巴切夫斯基得出结论：如果偏离存在，在可能的测量误差范围内，不仅在地球距离的范围内，而且在与太阳系有关的范围内，欧几里得几何学完全可以描述达到精确界限的空间特性。

因为运用欧几里得几何学比运用罗巴切夫斯基几何学更为简单，所以欧几里得几何学对于实用目的保持自己的意义。如果涉及宇宙空间的测量问题，或者为了研究微观世界物理现象的测量，那么欧几里得的几何学有可能变得不适用，在这种情况下必须运

用罗巴切夫斯基的几何学。

罗巴切夫斯基在几何学方面不断发展了自己的思想，并为此作出了贡献。除了已经提到过的著作以外，尚有许多著作，如：《几何学新原理与完整的平行线理论》(1835～1838)、《虚几何学》(1835)、《虚几何学在一些积分上的应用》(1836)、《根据平行线理论的几何学探讨》(1840)、《泛几何学》(1855)。

为了明确数学科学的基本原理，普遍调整这门科学的叙述，罗巴切夫斯基无论在初等数学中，无论在高等数学分析中，足迹都已越出几何学的范围。例如，罗巴切夫斯基在1823年已经完成了初等代数教程。他把这本著作交给大学数学物理系审核，1825年9月11日它在系的会议上获得了赞同。可是由于各种原因，罗巴切夫斯基的上述著作直至1834年书名改为《代数或者有限的计算》，在作了修改后才第一次出版。罗巴切夫斯基最初准备把代数教程作为中学教科书，但是修订之后他决定将它定为教师用的参考书。

罗巴切夫斯基对自己的教科书在它的序言中已经阐明编写的主要宗旨。他发现，在代数中象几何学一样，对最基本的概念缺乏深入的研究。

罗巴切夫斯基叙述数学内容，从几何学到代数学，都遵循严格的要求，从最初的代数学原理开始，当他证明最基本的论断时，他也遵循这种要求。例如，当减数是零时，差等于被减数，或者如果对一个数加上另一个数，然后又减去这个数，则原数不变，等等。罗巴切夫斯基进一步叙述新的原理时，以严格的证明为论据，在自己的证明里都根据明显的或者早已证明过的论断。这样，他创立了结构上类似通常几何学教程的代数演绎法课程，应该把罗巴切夫斯基的整个《代数》看作是扩大了的和加深了的初等代数教程。同时，这本教程包含许多特点，这些特点使它在另外许多现代的代数学教程中，在科学价值方面，成为独创的和卓越的教程。

下面我们将指出《代数》一书中的某些特点。罗巴切夫斯基在第八章中叙述了形如利用行列式解线性方程组的方法。在第十一章里叙述关于实数的幂和根的问题，罗巴切夫斯基结合牛顿二项式展开公式的推论，并以这个公式为基础得到开任何次方的法则。研究二项式的分数指数和负指数的情况，罗巴切夫斯基得出无穷级数并弄清级数的一些性质。在第十二章里专门叙述虚数的幂和根的问题，弄清求单位根的方法。罗巴切夫斯基在《代数》的第十四章里对三角函数作出研究。他提出如下的说明理由："我想不脱离代数的范围，也谈一谈三角函数……因此，不仅方程的解法需要这样的参考书，甚至幂的理论如果没有它就将成为不完整的理论。"也许这里包含了罗巴切夫斯基另外的设想，他在《1825～1826年的纯数学教学的评述》里叙述了这些设想。他在该书里说："几何研究在三角学开头时是需要的，一直到这些研究不能用来发现三角函数特殊性质为止。这种性质包含用这些角的正弦和余弦算出两角和的正弦值。由此出现完备的与几何无关的三角学，这种三角学具有分析的一切优点。"有趣的是，指数函数的概念建立在罗巴切夫斯基叙述三角函数问题的基础上，就是他根据欧拉公式，然后用解析的方法得出整个三角学的基本关系式。

用解析方法叙述三角学能够得出自变量的任意值。我们将三角学从几何学中摆脱出来，从而能够在各种不同特征问题中采用三角学的方法，作为一种特殊情况，研究三角学对几何学的应用。因此罗巴切夫斯基三角学的思想，对于发展我们现在三角学的教学是极有价值的。

《代数》一书最后一章的结束语引起人们很大的兴趣。罗巴切夫斯基在这一章中给出了方程的近似解法，这种方法常常不公正地命名为瑞士数学家卡尔拉·格列费(1799～1873)的方法。有时认为这种方法的发明是比利时数学家乔治·达杰莱(1794～1887)。他比罗巴切夫斯基早作出某些理论上的见解，根据这些见解可以

着手方程的根的定义，但不是方法的本身。同时，罗巴切夫斯基根据完全另外的理论基础，不仅能够着手解决问题，而且给出了用以立刻进行具体计算根的方法。

罗巴切夫斯基在自己初等数学的讲义里遵循概念的严格性，尤其是各种数学学科的基础概念的严格性，他的数学分析著作也在很大程度上带有这种特点。在题为《论三角级数的收敛》(1834)和《判定无穷级数收敛和从很大的数趋近函数值的方法》(1835)的两篇文章里，罗巴切夫斯基将数学分析的最主要的概念作了详细的说明，特别强调注意这些概念，对这部分内容所作的解释超过了西方同时代人的思想。正是在这些著作中罗巴切夫斯基更详细地说明函数的概念，函数的可微性和连续性，如果在罗巴切夫斯基时代把函数看作为变量来研究，函数的变化与另外的变量有关，函数可用解析方法表示，那么罗巴切夫斯基的函数具有更为广泛的意义。他说："一般概念要求，把对每一个 x 给出的并始终与 x 一起变化的数叫做 x 的函数。函数值则可以用解析式给出，或者用一个条件给出，这种条件提供检验所有的数，并从其中选出一个数的方法，最后，函数的依赖关系可以存在，但仍然是未知的。……看来事实上不必怀疑在宇宙中的一切都可用数来表示，但并不是它们的任何变化和关系都能用解析函数表示的。在广泛形式的理论中，所谓存在相互关系，含义仅仅是一个数与另一些数相联系，并且当那些数给定后，这个数也就取确定的值。"因此罗巴切夫斯基给函数下了这样的定义，这个定义通常不公正地被认为是 П. 狄利克雷(1805～1859)给出的，尽管狄利克雷只在 1837 年才给出他自己的定义。

罗巴切夫斯基根据函数的连续性和可微性的问题，说出深刻的见解，这些见解表达了他同时代人在数十年间的思想，并且在我们现时代也是可以接受的。例如他用术语"逐渐"表示连续性，又用术语"连续"表示可微性。罗巴切夫斯基第一次严格地划清了这

些概念，并给出了正确的解释。他说："在任何解析函数中，应该注意逐渐性和连续性。在我的关于三角级数收敛的文章中，我证明了这样区分的必要性，如果自变量 x 的增量趋于零时，函数的增量也随着趋于零，就说这函数是'逐渐的'；如果当这两个变量减小时，它们的商在不知不觉中变成一个新的函数，就说原来的函数是'连续的'，并说新函数是微商"①。

罗巴切夫斯基的整个科学和教学活动都严格按照他养成的唯物主义的世界观进行。只要我们看看罗巴切夫斯基的数学和教学法著作中表现出的哲学主张，就可以在某种程度上了解他的世界观。

为此要了解，从哪里能够产生和在怎样的影响下巩固了罗巴切夫斯基的基本观点。应该想起，他生活在俄罗斯已经出现并已兴盛起来的独特的唯物主义哲学的时代，这种哲学思想传播到俄罗斯科学思想中有很深的根源，并渗透到数学家创作的作品中。毫无疑问，例如奥西波夫斯基的唯物主义著作，对罗巴切夫斯基都是很熟悉的。

从另一方面来说，必须注意的是，当时对法国资产阶级革命记忆犹新，在俄罗斯即将发生十二月党人起义，进步的俄罗斯青年非常兴奋地接受十八世纪末法国唯物主义哲学家的思想，罗巴切夫斯基青少年时代和他的教学活动的前期，正是在这样的时代度过的。

从罗巴切夫斯基的主张中可以看出，在青少年时代他的世界观主要是在西方进步的哲学影响下发展起来的。他个人独立的观点由此得到了培养和巩固，他超过了这种哲学，并建立了自己的与

① 罗巴切夫斯基在这段论述中，强调了对于用解析方式定义的函数，应该区别连续性和可微性两个不同概念，不过他用的术语和我们不同，他所说的"逐渐"，就是我们的连续；他所说的"连续"，则是我们的可微。他在这段文字里，先定义"逐渐性"（即连续性），再定义"连续性"（即可微性）和"微商"（即导数）。——译者注

俄罗斯社会优秀人物的进步哲学相适应的唯物主义哲学。

还在青年时代，担任喀山大学校长的最初几年，罗巴切夫斯基在恢复被马格尼兹基完全破坏的大学事业上，以自己的信念善于采取行之有效的措施。同时应该指出，那个时代的条件对于恢复大学是非常不利的。当时残酷的反动势力即将开始镇压十二月党人的起义。因此罗巴切夫斯基的思想更加宝贵，他热烈地为自由发展人的个性而斗争，并确信，每个人生下来就是为社会服务的。

罗巴切夫斯基是彻底的唯物主义者：他认为抽象的数学思想来源于周围世界，而不是人类的智慧。那时候大多数欧洲数学家，甚至包括最著名的数学家（雅可比、格拉斯曼和其他人），在关于数学真理的来源问题上都持唯心主义的观点。

罗巴切夫斯基的唯物主义观点，在他的几何学著作和《教学评论》一书中，得到明显的反映。他在这些著作中多次肯定自己的思想，任何科学都从借助于人的知觉得到的概念中产生，在现实的土壤中成长的，而不是以任何先天的概念作为它的基础的。如果人类建立数学结论不以他们已知的经验作为结论的基础，而仅仅依靠不与自然界相一致的用智慧产生出来的判断，那么这样推论的结果是无用的和与数学正确结论不一致的。罗巴切夫斯基说："任何科学赖以开始的起初的概念是由感觉获得的；而由先天获得的是不应该相信的。"罗巴切夫斯基同时用这些观点打击了关于空间先天性概念的错误思想。"一切想从与宇宙事物无关的智慧本身作成的数学原理，对数学来说，始终是徒劳无益的，甚至证明总是不正确的。"

从上述情况可以看出，罗巴切夫斯基在认识人类生活现象的过程中，他的叙述是非常彻底的。他断定，一切生活现象首先通过感觉被我们接受，然后在某个时刻，当需要概括和遵照一些感觉渐渐成为已经不可能的时候，感性知觉的结果经受着理性的抽象整理。当然，这样的理解认识过程，使罗巴切夫斯基在一般的认识论

中正确地评价综合和分析的过程。罗巴切夫斯基在《几何学新原理与完整的平行线理论》著作中写道："在数学里遵循两种方法：分析法和综合法。分析就是将研究的问题在实际上加以分解，或用逻辑抽象法在意义上加以分解。综合法或者理论的方法，就是要求与我们智慧的第一概念直接结合的那种概念。分析法的主要好处是，分析法中总可以直接得到想要的假设。综合法不隶属于任何的一般法则，但是由于需要，必须从一般法则开始，目的是要找出方程以后，同时获得一切转化为数的科学的特点。"

罗巴切夫斯基的唯物主义观点，由唯物主义建立起来的，在他自己的科学著作中和教学活动中，一直到生命结束他都遵循的认识论，帮助他仔细研究了宏伟的几何学的科学体系，它的成果广泛地应用于现代科学，在教育学和数学教学法领域，这项理论作为在我们苏联学校中得到广泛应用的许多重要思想的基础。

罗巴切夫斯基是喀山数学学派和喀山数学教育学派的创始人，这就充分地体现出他的科学的教学活动的巨大意义。

罗巴切夫斯基的著作，特别是他的非欧几何学，在数学历史中开创了现代数学的时期。

米哈依尔·瓦西里耶维奇·奥斯特罗格拉德斯基

奥斯特罗格拉德斯基(1801～1861)是十九世纪俄罗斯最伟大的数学家之一，他出生在一个波尔塔夫锡的地主家庭里。他从小就表现出很大的求知精神，善于深思和渴望理解发生在他周围的事物的意义。他特别对农业劳动中使用的机械转动、度量过程等感到兴趣。

奥斯特罗格拉德斯基 9 岁进中学，在中学里学习了 3 年。

在 1812 年卫国战争的年代里，由俄罗斯社会的感受引起的爱国主义情绪普遍高涨，激起了年轻的奥斯特罗格拉德斯基献身给军事工作的愿望。他按照父亲的、完全与他个人一致的心愿，中学

毕业后投身到一个近卫军团部学习军事。可是奥斯特罗格拉德斯基少年时的愿望没有得到实现。他的一个叫乌斯基诺维契的伯父劝阻米哈依尔·瓦西利耶维奇的父亲送儿子去从事军事工作。他说，米哈依尔有如此巨大的好学精神，他在大学学习将会有益得多，更会有兴趣。合理的建议被接受了。为了进入哈尔科夫大学，于是把奥斯特罗格拉德斯基送往哈尔科夫，他于 1816 年秋进入该所大学。



M. B. 奥斯特罗格拉德斯基

奥斯特罗格拉德斯基在哈尔科夫大学数学物理系学习，他抑制了自己以前对军事的热情，以极大的努力学习数学的各门学科，在这项学业中，他显示出如此顽强的学习精神和巨大的才能，他以非凡的成就使自己的教师感到震惊。从那时起，奥斯特罗格拉德斯基终身始终如一地迷恋于研究数学问题。

1820 年奥斯特罗格拉德斯基获得了大学毕业证书。第二年为了巩固获得的知识，更加深入地研究数学学科，决定重温大学的最后课程。

当时哈尔科夫大学的校长是 T. Φ. 奥西波夫斯基。他的哲学思想，特别是他与康德学说意识形态的斗争，吸引住男女青年，毫不奇怪，唯物主义哲学在哈尔科夫大学的青年学生中间有着令人敬重的地位。年轻的奥斯特罗格拉德斯基是这种哲学的拥护者之一。从这时起，唯物主义思想在奥斯特罗格拉德斯基的所有的著作中成为有成效的基础，这个基础使这些著作成为生活上必不可少的，并促进了奥斯特罗格拉德斯基的创作活动。

奥斯特罗格拉德斯基第二次结束大学课程以后，由于在数学学科中表现出卓越的成绩，被提请大学授予他数学学科副博士学位。但是在哈尔科夫大学里，反动的唯心主义哲学的代表和以奥西波夫斯基校长为首的唯物主义哲学拥护者之间意识形态上激烈斗争的结果，情况出乎意料地复杂起来了。哈尔科夫大学的哲学教授杜特洛维奇，他是个极端的唯心主义哲学派别的代表，反对授予奥斯特罗格拉德斯基副博士学位的大学委员会的呈文，并送上自己对委员会会议的特别意见的附录，在意见里他对授予奥斯特罗格拉德斯基以科学副博士学位提出抗议，反对的理由之一是"奥斯特罗格拉德斯基不听神学和基督教的学说"。[①] 哈尔科夫学区的督学卡内叶夫和戈利津部长把主要注意移向杜特洛维奇的特别意见，不重视大学委员会的决定。部长不仅不准授予奥斯特罗格拉德斯基以学位，甚至还指示阻拦发给他大学毕业证书，直到全部重新考试后才发给。这个指示的理由是，奥斯特罗格拉德斯基是在一般大学未有规定的速成期限毕业的。

奥斯特罗格拉德斯基没有同意这种侮辱性的指示，由于剥夺了在俄罗斯继续科学工作的权利，他被迫离开祖国。为了继续顺利地开始创造性探求，他在国外寻找这种机会。他来到了那时是西欧数学思想的中心——巴黎。

奥斯特罗格拉德斯基在巴黎索尔奔纳和在法兰西学院勤奋地听数学物理学科的讲演。他的杰出的天赋不久就引起了他的教授们诸如著名的法国数学家：拉普拉斯、富里叶、安培(1775～1836)，泊松(1781～1840)、柯西和其他一些人的注意，并与其中某些人友好往来。由于这个原因，他有可能了解当时激动数学物理科学代表们的一切重大的科学问题。不久，奥斯特罗格拉德斯基本人在

---

① 这里应当强调指出，奥斯特罗格拉德斯基是无神论的拥护者。他说："只有经过证明的事物才应该相信。但是我们不可能证明最高级事物的存在，因此我们不应该相信上帝。"(B. Д. 奇斯佳科夫注)

解决这些问题中开始表现出很大的独创性。他在数学物理、分析力学和天体力学方面进行了工作，并在为最有成效地解决实用数学问题所必需的纯数学的一些问题上作了研究。

奥斯特罗格拉德斯基早年的工作是研究波的传播理论、热的理论、以及研究在积分区间内趋于无穷的函数积分的主值理论的应用①。

还在 1825 年柯西对奥斯特罗格拉德斯基积分学方面的著作就已给出赞扬的评语。而在 1826 年，由奥斯特罗格拉德斯基提交巴黎科学院的他的《圆柱形蓄水池中波的传播》著作，在学术界获得了广泛的声望。他在这本书里给出了圆形平底的圆柱形蓄水池内，水的微小波动的定义。

奥斯特罗格拉德斯基用自己数学物理和积分方面的著作，赢得了大科学家的名义。因此他在 1827 年底回归祖国时，尽管处于警察的秘密监视之下，但他很快地在俄罗斯的学术界占得了应有的地位。1828 年 12 月科学院推选他为应用数学的副院士；1830 年他已经成为科学院的候补院士，过了一年成为正式院士。并从 1855 年起指派他为纯数学的正式院士。

他以后的纯数学和应用数学方面的著作，使他获得了世界的声望：他成为都灵科学院、罗马科学院、美国科学院院士，以及成为巴黎科学院通讯院士，并获得其他荣誉的科学头衔。

高级专门学术部门把在自己教授中间有奥斯特罗格拉德斯基一事看作是很大的荣誉。他在不同时期，在海军武备军团的军官学校、线路通讯工程学院、中心教育学院、工程师和炮兵中心学校里讲课。

奥斯特罗格拉德斯基的科学著作，主要涉及到数学物理、数学分析、力学、天体力学的问题。但是他还写下了某些概率论的文

---

① 关于广义积分的主值的概念，可参考菲赫金哥尔茨《微积分学教程》第二卷第三分册，人民教育出版社 1954 年版。——译者注

章，以及与中学教学问题有关的三本著作。

奥斯特罗格拉德斯基在数学物理方面进行工作，他是俄罗斯这项事业的奠基人。这门学科在俄罗斯得到最初的发展完全应该归功于他。他贡献给数学物理学的最重要的论述有，关于弹性理论、热的理论等。他的天体力学教程，阿拉戈(1786～1853)和泊松都给予了出色的评语，获得了巨大的声誉。

奥斯特罗格拉德斯基在力学教程中建立了最一般形式的虚位移原理和最小作用原理，他是独立于哈密顿作出这些原理的。

奥斯特罗格拉德斯基在变分法中获得了比西方数学家所达到的更为普遍的成果。他在这些问题的一篇论文中，导出了把多重积分化为重数较低的积分的最普遍形式的公式，在分析中遇到的高斯公式、格林(1793～1841)公式和斯托克斯公式(1819～1903)都不过是它的特殊情况。

奥斯特罗格拉德斯基在积分学方面获得了许多有益的结论并加以推广，特别是他研究了有理函数的积分能否表示成代数函数和对数函数的问题，并且顺便得到了把有理分式的积分分解成两部分的公式，其中一部分表示成代数函数，而另一部分是分母中带有单根的分式的积分；这个公式叫做奥斯特罗格拉德斯基-埃尔米特公式，通常在数学分析的初等教科书中可以见到。

与奥斯特罗格拉德斯基探讨代数函数的著作有关的，应该提到为军官学校的学生讲课用的代数函数和超越函数的厚厚的讲义。他在这本丰富的讲义中，对高等代数和数论提供了出色的叙述，并在讲义中核算了在那时已为大家所知道的这门学科方面的全部最新的成果。他也在这本讲义中给出了代数函数的精确定义。

奥斯特罗格拉德斯基还编写了几本概率论著作，对这个数学分支作出了重要贡献。

奥斯特罗格拉德斯基对于教育和教学法方面的问题，总是抽

出时间编写重要的科学著作。他在军事学校里工作时，是数学课程的主要督察人员。他以主席职务的名义召集委员会商讨数学教学法，制定教学大纲，以及对希望得到数学学科教师头衔的人进行考试和试讲。奥斯特罗格拉德斯基编写出一系列的教学法著作。例如，他与法国数学家伊萨克·奥古斯特·勃鲁姆共同编写出中学教学的小册子。他们两人不赞成在中学里建立在抽象概念基础上的大多数课程的教学。他写道："学生应该根据可能独立地得出图形，计算重量，度量单位，最简单的机械，物体的物理性质和化学性质的概念。在学校中必须建立起不大的精巧的实验室。在实验室里，学生可以雕塑，素描，绘图，学习使用不复杂的仪器等等，只有当学生用直观的方法获得某些知识时，才可以接近精确科学的系统教学。"

奥斯特罗格拉德斯基还编写了下面两本教学法著作：《三角学概要》和《初等几何学教程》。

奥斯特罗格拉德斯基在《三角学概要》里，从直角三角形的边的比出发，来定义各个三角量。在二十世纪初喀山数学家 H. П. 基尔久舍夫斯基的著作中，首先应用这个重要的教学方法。现在收录在 A. Ф. 别尔曼特（1904～1959）和 Л. A. 柳斯杰尔尼克（1899 年生）的教科书中。

《初等几何学教程》的构思是相当新颖的。奥斯特罗格拉德斯基在这本著作中，试图把几何的叙述接近于数学的解析部分所用的叙述方法。他写道："这本著作是以发展基本原理、定理的方式和证明的方法不同于同一学科的其他教程的。作者考虑到，几何的叙述接近于数学其他部分一般使用的方法，所以作者有次序地安排最大程度地显示出适合于预先提出的目标的命题，某些命题不用图形教具，而用解析方法予以证明，也就是对某些部分的几何叙述赋予代数的特色。"

虽然奥斯特罗格拉德斯基在《初等几何学教程》中，对几何学

和它的叙述方法所提出的许多观点引起了很大的科学兴趣，但是教程本身也没有找到实际的应用，因为它对开始学习几何学的学生来说过于抽象了。该书没有遵循直观性原则和实际应用的原则。奥斯特罗格拉德斯基在中学教学小册子中，对直观性和实际应用的原则提出了自己的看法。

从奥斯特罗格拉德斯基逝世起，到现在已过了一百多年，他的科学思想和教学法思想直到今天依然是苏联科学家仔细研究的课题。因为他用自己的创作，以新思想的极大造诣丰富了科学，提出了一系列的问题，其中有些问题至今还没有得到解答。

巴夫努季·里沃维奇·切比雪夫

十九世纪下半叶，在俄罗斯数学家中切比雪夫以自己独创的著作在数学发展史上留下了不可磨灭的功绩，从而成为出类拔萃的数学家。

切比雪夫(1821～1894)是旧贵族家庭的一员。他出生在卡卢加省波罗夫斯县奥卡多沃小村庄。1841 年毕业于莫斯科大学。他提出《概率论初等分析的尝试》而获得硕士学位。这篇学位论文提出不运用高等分析，只用初等代数和级数理论中的简单知识的方法研究叙述概率论基本法则。

1847 年切比雪夫作为副教授开始在彼得堡大学工作，1849 年他提出了题为《比较理论》的博士学位答辩论文，他被授予数学和天文学博士学位。切比雪夫在彼得堡大学一直工作到 1882 年，他还在另外的学校和科学机关兼职。从 1853 年起他在科学院工作，先是作为副教授，然后从 1856 年起作为候补院士，而从 1859 年起成为正式院士。

切比雪夫的整个科学活动是以他的唯物主义世界观为基础的，所以他的活动把理论研究与实际运用紧密结合起来。

切比雪夫在《地图绘制》著作中写道："数学科学在远古时代是

十分引人注意的；在现代，数学对艺术和工业有着更加重要的作用。理论联系实际能得出最好的成果，但也不是仅仅单独的实践就能获得结果；科学本身是在实践的作用下发展的：实践为各门科学开辟了研究的新课题或者早已知道的科目的新的方面。尽管最近三百年伟大的几何学家的著作，把数学的各门学科引导发展到高级的程度，实践还是发现它们在许多方面有着明显的不完备；实践不断提出科学上实质性的新问题，这样就促使寻找完备的新方法。如果从旧方法的新应用中或者从理论新发展中得到许多好处，那么理论还将发现并获得更多的新的方法。在这种情况下，科学得到实践的正确指导。"



П. Л. 切比雪夫

切比雪夫在科学的探索中对实际工作能直接应用的、同时适用于解决理论问题的那些问题更感兴趣。他从青少年时代起就对新发明的东西和各种类型的机械结构表现出非常的爱好。从1851年起这种爱好更加强烈并获得了扎实的理论基础。当时切比雪夫在皇家高等政法学院教授应用力学。

切比雪夫在自己的一系列著作中，都叙述了由他所发明的主要是以杠杆铰链连接原理为基础的机械理论。前期的这类著作之一是《有名的平行四边形机械的理论》。

把曲线运动变成直线运动的问题，属于切比雪夫在建立机械的条件下被解决的一些基本问题之一。他的《平行四边形》一书没有精确地解答这个问题。但是切比雪夫体系中的不确切是如此的

无足轻重，在实际运用中不起任何的作用，因为他所创造的机械完全可以换成结构更复杂的精密机械。切比雪夫发明了很多各式各样的机械，运用这些机械去完成预定的工作时，能够节省劳动和时间。其中最值得注意的，例如结构比欧洲最初的要好得多的计算器。在根据化曲线运动为直线运动的原则设计的仪器中，特别有趣的是车具、选种机、爬行机器、推进机械、测量弧曲率的直规、画大半径弧的曲线板、海船的吊床等。

制造类似的机械要求发展力学和发明建立在极大值和极小值问题基础上的新的方法。因此这类问题就成为切比雪夫特别研究的对象。由于他创立了偏离零最小函数的专门理论的结果，作成 $-h$ 到 $+h$ 区间上的几个著名的多项式。其中最有名的是下面的多项式

$$T_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x)=\frac{1}{2^{n-1}}[(x+i\sqrt{1-x^2})^n$$

$$+(x-i\sqrt{1-x^2})^n]=\frac{1}{2^n}[x^n+c_n^2x^{n-2}(x^2-1)$$

$$+c_n^4x^{n-4}(x^2-1)^2+\cdots\cdots]。$$

其中脚码 n 表示多项式的次数。我们给 n 以各个自然数值，就能得到不同次幂的多项式，并且每个这样的多项式都是同次的一切多项式中偏离零最小的。

怎样的多项式叫做偏离零最小？为了说明这个问题，我们考虑一种特殊情况——二次多项式。任意二次多项式可表示成 ax^2+bx+c。如果作这个多项式的图象，即函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，那么根据系数 a、b、c 不同的值，得到不同的抛物线。考虑在一个确定区间内抛物线的图象，例如在区间$(-1,+1)$内，我们将得到这个区间内的曲线，当然这些曲线的规定区间范围内的点，是分布在离横坐标轴不同的距离上。(在 x 的最高次幂的系数等于 1 的多项式中)如果一个多项式在区间$(-1,+1)$内离横坐标轴最大偏差

是最小的，即比所有其他的二次多项式的偏差都小，它就是二次多项式中离原点偏差最小的多项式。类似地可以表示获得离原点偏差最小的高次多项式。切比雪夫多项式的特殊情况如下：

$$T_1(x)=x,\ T_2(x)=x^2-\frac{1}{2},\ T_3(x)=x^3-\frac{3}{4}x,$$
$$T_4(x)=x^4-x^2+\frac{1}{8}，等等。$$

这种 n 次多项式 $T_n(x)$ 在区间 $(-1,+1)$ 有 n 次为零，并且数值在 $-\frac{1}{2^{n-1}}$ 和 $+\frac{1}{2^{n-1}}$ 之间摆动。同时其他同次幂的多项式偏离原点将较大。在发展现代分析中，切比雪夫多项式具有很大意义。

切比雪夫在数论方面的著作，特别是他的质数问题的作品，也对发展数学学科具有很大的意义。

还是从欧几里得起，许多大数学家对自然数列中质数的分布问题就已感到兴趣。欧几里得证明过存在无限多个质数。欧拉、勒让德(1752～1833)、狄利克雷和其他的数学家进一步研究了质数分布的问题，但是对于解决这个问题终究没有取得重要的成果。切比雪夫在自己的数论经典著作《关于确定不超过给定值的质数个数》和《关于质数》中，作出了质数分布问题的许多出色的结论。例如，他作出表示小于任何给定数的质数个数的渐近公式的法则。这个公式就是

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}。$$

其中 x 是一个数，$\pi(x)$ 表示小于 x 的质数的个数。叫做渐近公式的原因是，对于较小的值，公式给出不够精确的答案。但是按照数 x 增大，上述公式给出的答案误差相当小。

在切比雪夫关于质数的很多结论中，有一个容易理解的命题可以用作实际检验："在任何给定的数和它的二倍之间至少可以找到一个质数"。

切比雪夫对概率论、数学分析、内插法理论的发展同样作出了较大的贡献。在切比雪夫时代，概率论在俄罗斯首先形成为在人民经济生活中具有重要应用的科学。杰出的俄罗斯数学家В. Я. 布聂雅可夫斯基(1804～1889)在这方面迈出了最初的几步，他在自己的著作《试论死亡率法则》、《俄罗斯死亡率和居民的表》、《人类学研究》中建立起基本原理，依据这些原理，把概率论应用于统计学和保险事业。切比雪夫在大学毕业后写成的许多早期著作则都是供研究概率论问题用的。切比雪夫在这方面作出了专门独创的方法，他利用这种方法作出了概率论重要法则的基本结论。

切比雪夫很多著作是专门讲述概率问题的，这些著作中最为重要的是《平均值》、《概率论一个一般命题的初等证明》、《概率论的两个定理》和其他一些著作。切比雪夫在概率论的另外的结论中，作成概率论基本原理中的一个所谓“大数定律”。这个定律的要点是，如果随机量有时实际具有的值，离开它们的平均值很多，那么随机量的很多个值的算术平均值具有小的偏差，即非常接近平均值的概率很大。

切比雪夫的概率论著作，无论是理论意义，或者是实用价值，特别是在炮兵、技术、自然科学中，作用都非常大。

切比雪夫在数学分析方面的研究很重要。特别是在发展阿贝尔和其他数学家的思想时，切比雪夫解决了在有限形式下积出椭圆积分的困难问题。他还成功地证明了在十八世纪还无人知道的一个结论：微分二项式积分时，只有三种情况能利用代数和对数符号积出。微分二项式积分法的这种情况，以切比雪夫代换的名字载入积分学的所有整个初等教程中。

切比雪夫在建立机械方面的研究和他的偏离零最小的函数理论著作，是他对数学接近实用目的的渴望的最好回答。在这个意义上，他作出了很多函数实用的近似计算。其实，偏离零最小的函数问题，仅仅是切比雪夫用多项式构作函数近似表达式的特例。例

如，切比雪夫在建立具有较大实用意义的内插法公式方面的著作，享有广泛的声誉。

函数近似表达式的思想在切比雪夫很多实用性的著作中都有所反映。如《地图的结构》，《服装裁剪》等。《服装裁剪》一书与机械结构的理论有着紧密的关系。类似于用杆制作机械那样，杆的长度不变，而它们之间的倾角有变化，或者在加工杆时，线的长度仍旧不变，而变化纬线和经线之间的角。切比雪夫把裁剪问题与曲面论结合在一起，建立了一些基本原则。根据这些原则把织物裁剪成曲线，即使是近似的，但是有最小的误差，使得缝制出来的衣服合身。

切比雪夫的各种科学活动，贯穿着一个共同的思想：使人们能够把深刻的数学理论运用到实际中去，并教导他们："怎样使用自己的方法，尽可能获得较大的益处"。

切比雪夫著作的内容不是偶然的，而是时代向他提出的要求。他生活在机器技术的发展对数学提出新要求的时代。早就进入技术中的旋转运动，在建立蒸汽机以后获得了特殊的意义。切比雪夫的同时代人、机械和汽车的理论家、德国科学家弗兰茨·列勒描述自己的时代是"一切都在旋转"的时代。这就自然地出现了一种需要，也就是必须依靠带有不多数量环节的机械把圆周运动改变成另外的运动，特别是变成直线运动，即使是近似的，这在切比雪夫的机械中也有所体现。机械的建立导致发展近似表示函数理论的必然性，这个理论也包含着切比雪夫很强的独创思想。

切比雪夫在大多数创作性的著作中，提出了当时是全新的课题，并对这些课题的研究建立了自己的方法。因此切比雪夫在数学科学发展中的意义，不仅在于他在自己的著作中传给我们理论的和实用的结论，同时他也提供了引起下一代人兴趣的许多新问题。

切比雪夫是新数学学派彼得堡第二学派的创始人（欧拉学派

被认为是彼得堡第一数学学派)。

切比雪夫的科学功绩，当他在世的时候，就获得广泛的赞扬，他的名字传闻于整个文化界。关于这一点我们可以根据授予切比雪夫荣誉的奖赏和光荣的称号来判断。他是彼得堡科学院副院长，1874 年推选他为巴黎科学院的外国院士；授予俄罗斯科学家[①]这个光荣称号的，在巴黎科学院的历史中总共只有两次。

1890 年切比雪夫获得法兰西共和国最高勋章，即荣誉团勋章。许多与切比雪夫同时代的外国大数学家，对他的科学活动给予最好的评述。例如，法国数学家沙尔·埃尔米特(1822～1901)在 1853 年寄给切比雪夫关于推荐他为巴黎科学院通讯院士的通知时写道："这种尊敬完全是对功绩的充分重视和其应有的荣誉，是由于您在算术中卓越的发明和您的内插法理论的重要著作"。在 1890 年同样是这个埃尔米特将切比雪夫称为"俄罗斯科学的骄傲，是各个时代最伟大的几何学家之一"。斯德哥尔摩的数学教授古斯塔夫·米他格·勒夫莱 (1846～1927) 认为切比雪夫是"各个时代最伟大的分析导师之一"。俄罗斯科学院院士 A. A. 马尔科夫(1856～1922)和 H. Я. 索宁(1849～1915)对切比雪夫的工作同样给予很高的评价。他们写道："切比雪夫的著作带有独创性的特征。他发明了解决许多早就提出但是始终没有得到解决的难题的新方法。"

切比雪夫在逝世以前，思想上始终没有离开过数学问题。在逝世前夕，他还与自己的学生，后来成为大数学家的 Д. A. 格拉维(1863～1939)交谈，并告诉他把曲线弧近似地排成直线的法则。

索菲亚·华西里叶芙娜·柯瓦列夫斯卡娅

在评论十九世纪具有出色成就且对数学发展以及明确它的基本原理产生影响的俄罗斯数学家时，我们不能避而不谈俄罗斯的

① 彼得一世是巴黎科学院的第一位俄罗斯院士。

第一个女数学家柯瓦列夫斯卡娅。


C. B. 柯瓦列夫斯卡娅

柯瓦列夫斯卡娅(1850～1891)出生在炮兵团长B. B. 柯尔文·克鲁柯夫斯科伊的家庭里。她的童年和青少年时代都是在贵族地主的环境里度过的，这并没有妨碍她成为既是一个大科学家，又是一个有革命情绪的人的特殊才能和性格特点的发展。进步的潮流以各种途径深入到这个贵族家庭，并使年轻的一代受到积极的影响。较晚的时候，在柯瓦列夫斯卡娅创造力兴盛的时日，这股潮流得到了鲜明的反映，她的天赋禀性没有局限于纯数学方面，柯瓦列夫斯卡娅创作了若干部文学作品，她象一位女作家一样表现了自己。这些作品使她站在上世纪六十年代俄罗斯的始终不渝的革命启蒙者的队伍里。

柯瓦列夫斯卡娅对科学和对社会政治事件一样，感到浓厚的兴趣。

她从早年起就产生了强烈的好学精神。她完全还是小姑娘的时候，就开始被各种各样的科学发明和科学问题的故事所吸引，这些故事是从自己的博览群书的伯父П. B. 柯尔文·克鲁柯夫斯科伊那里听来的。在生活的这个时期，虽然她的儿童思考力还不可能理解这些数学问题的实质，诸如积分，或者有些曲线存在渐近线，曲线无限趋近于它的渐近线等等。但是这些问题由她的伯父叙述得如此引人入胜，在小姑娘天生敏感的脑子里，不由自主地留下了不可磨灭的痕迹。当她8周岁时就开始学习普通科目，为此

目的聘请了家庭教师 И. И. 玛列维奇。他作为历史语文学科的专家，在教学中较多地注意到的正是这些学科，并时常赞美自己学生的学习成绩。至于数学课程，玛列维奇认为，课程的进行是正常的，甚至是很好的。但是按照数学学科来说，他没有觉察到自己的学生有任何特殊的才干。当小姑娘已经近 12 岁时，一桩事件引起教师对小姑娘的特别注意。玛列维奇建议柯瓦列夫斯卡娅学习圆的周长与直径的比的问题，这个问题在教科书中已作详细的说明并由玛列维奇亲自解说清楚，第二天小姑娘向教师提出了完全独立的论断。稍过了一段时间，又发生了另一件使周围的人确信她对数学有非凡才干的事情。有位熟人，是海洋学校的物理教师 H. H. 蒂尔托夫，他把自己的一册物理教科书赠送给小姑娘的父亲。小姑娘对这本书发生了兴趣，以致使父母大为震惊。她在读教科书的正文时，遇到了她不知道的三角函数。她在学习书中使用的这些函数时，看透了函数的涵义，并独立地推导出最简单的三角公式，这就引起了蒂尔托夫的赞美。蒂尔托夫把她叫做"新的帕斯卡"，他用这句话是要说，柯瓦列夫斯卡娅在不懂这个学科的情况下，完全独立地重新发现了三角课程中的一些关系，正象帕斯卡在童年时代就能证明几何定理一样。

从这时起，柯瓦列夫斯卡娅的父亲完全相信女儿对数学有非凡的才干，因而作出决定，今后应该让她研究数学科学的专门知识。

就在那时，柯瓦列夫斯卡娅所具有的两个不可遏止的志向完全树立起来了。第一个志向引导她直接参加社会革命运动，第二个志向引导她解决数学科学领域中最困难的问题。第一个志向使她走上了宣传最进步思想的道路，成为一名女作家。第二个志向使她在妇女争取获得科学权利的道路上克服一切障碍。柯瓦列夫斯卡娅在实施第一个志向时，创作了许多艺术上反映当时时代和号召青年为人类光明的未来而奋斗的文艺小说。第二个志向导致

她向最难达到的数学高度攀登，并使她成为光荣攀登这个高度的第一个妇女。她用自己在科学上的成就，在科学上为世界的其他妇女开辟了一条道路，并且证明，妇女是能够与男子一样，为认识自然界中人类周围最复杂的奥秘而奋斗。

1867 和 1868 年柯瓦列夫斯卡娅是在彼得堡度过的，她在那里在教育运动的杰出活动家之一、海洋学校的教师 A. H. 斯特拉诺柳勃斯基领导下研究数学。柯瓦列夫斯卡娅掌握高等数学原理以后，她对此没有满足。她表现出立志获得系统的大学教育的愿望。但在那时她要实现此事是非常不易的。俄罗斯不准许妇女进入高等学校。为了出国学习，必须得到父母的同意。对于大多数俄罗斯少女来说，这通常是不可克服的障碍。在进步青年中，常见的方法是用假结婚来摆脱困境；也就是姑娘与某个青年人举行宗教婚礼，这个男青年同意，结婚不是真的，而仅是为了使姑娘能够从父母的监督下摆脱出来，并且过独立的生活。柯瓦列夫斯卡娅找到了这样的人。这个人是年轻的学者、古生物学家和地质学家 B. O. 柯瓦列夫斯基 (1842～1883)。后来他在为自己的研究选择的科学领域内作出了重大的发现。这个假结婚在 1868 年举行，在晚些时候，当这对年轻人理解了各自科学的和社会的愿望一致时，他们才在许多方面彼此接近，产生了爱情，并将结婚变成事实。

1869 年柯瓦列夫斯卡娅与丈夫及姊姊安娜一起迁居国外．但是起初的一段时间在这里等待着她的是失望。原来是，她急急忙忙到海德堡来，希望在那里安排成为一个大学的女生，但是她只能参加听个别教授的讲授。在听完他们三个学期的讲课以后，柯瓦列夫斯卡娅已经具有丰富知识和善于得出独立的结论，决定准备博士学位的论文。她前往柏林，主要目的是听著名的数学家维尔斯特拉斯的讲课。但是，那里的大学章程中，妇女不能听教授讲课，所以柯瓦列夫斯卡娅不得不直接向维尔斯特拉斯提出准许她听他讲课的请求。当维尔斯特拉斯了解了她的数学作品的非常好

的鉴定，并能亲自断定她有巨大的数学才能时，他就答应用个别方式在家里辅导她，因为她不可能得到许可去大学听课。不久，柯瓦列夫斯卡娅取得了巨大的成就，她便成为他喜爱的学生了。

柯瓦列夫斯卡娅在维尔斯特拉斯的指导下工作了四年。可是，在这个工作期间，有较大的间歇。她在间歇时期探望了故乡，或者前往巴黎和瑞士。其中有一次这样的旅行具有特别重要的意义，这是1871年，在那个期间出现了十九世纪最大的政治事件之一，即在巴黎建立了巴黎公社。这个事件明显地反映在柯瓦列夫斯卡娅的一生中。她的姊姊安娜还在1869年就离开海德堡到达巴黎，她被吸引到那里希望认识社会运动和研究这个运动，并很快地熟悉了在巴黎高涨的革命运动。她不久嫁给了法国有名望的革命家维克多·扎克朗，这种情况特别有利于她了解革命运动。扎克朗在巴黎公社时是积极工作和非常负责的巴黎公社的领导人，而安娜·扎克朗是蒙马特尔[①]警惕委员会主席团的委员和妇女联合会中央委员会的委员。当不通过德国军队的前线和反革命凡尔赛人的包围可以潜入到巴黎去的时候，C. B. 柯瓦列夫斯卡娅与丈夫不顾对他们个人自由甚至生命威胁的极大危险性，还是敢于投身到这项事业中去。他们顺利地达到了目的。当英雄的公社给予反革命军队以打击时，这样的大部分时间他们停留在巴黎。在这些残酷的日子里，柯瓦列夫斯卡娅与姊姊一起在医院工作，给予负伤的公社社员力所能及的帮助。柯瓦列夫斯基夫妇在公社失败前九天离开了巴黎。他们耽在柏林期间，得到公社陷落和反革命军队暴行的消息以后，柯瓦列夫斯基夫妇担心扎克朗的命运，又回到了巴黎，在巴黎顺利地把安娜·扎克朗从苦役中解救出来，而为她的丈夫准备了越狱，将他从枪决的威胁中解救了出来。

柯瓦列夫斯卡娅由于在维尔斯特拉斯的指导下做了科学工

---

① 蒙马特尔是巴黎的一个区，是1871年3月18日巴黎无产阶级和资产阶级军队进行决战的地方。——译者注

作，创作出许多有价值的数学著作。其中之一是《编微分方程理论》，柯瓦列夫斯卡娅在该书中，解决了微分方程理论的一个主要定理。这个定理以柯西-柯瓦列夫斯卡娅定理的名称载入数学史册。这个定理的各种推广是许多数学家研究的课题，直到现在这个定理经常为各种数学研究所应用。柯瓦列夫斯卡娅的另一著作专门讲述了土星环的问题。在这本著作中，更确切地解决了拉普拉斯较早就提出的一些问题。最后，她在第三本著作中给出阿贝尔积分的简化形式。根据维尔斯特拉斯的请求，哥廷根大学审查了这三本著作，并授予柯瓦列夫斯卡娅哲学博士的学位(1874)。这个学位大约相当于现在的科学副博士的学位。

柯瓦列夫斯卡娅获得博士学位以后回到了祖国，期望得到适合于她的知识和科学家学位的工作。但是在当时的俄罗斯，妇女走向科学的道路是被封锁着的。柯瓦列夫斯卡娅在任何一所高等学校里都未能找到工作。这种情况以及生活条件的变化，后来她生了一个女儿，使她暂时放弃了数学。她长时间地在完全别的部门工作，即开始当女新闻记者和撰写时事评述的随笔。但是柯瓦列夫斯卡娅的思想还是不由自主地回到她所喜爱的数学问题上，在1879年底，她在第六次自然科学家和医生的代表大会上，作了一次专讲阿贝尔积分问题的报告。这个报告受到出席大会的大数学家们的称赞。

在1880年，柯瓦列夫斯卡娅决定准备在俄罗斯答辩硕士学位的论文。但在从前，妇女获得科学家学位是不可能的。教育部部长萨布罗夫阻挠给予学位。他讥讽挖苦地宣称，索菲亚·华西里叶芙娜本人和她的女儿“在准许妇女进入大学以前已经进入老年了”。

柯瓦列夫斯卡娅在俄罗斯从事科学工作的理想失望后，重新与维尔斯特拉斯建立了联系，并在1881年再一次离别俄罗斯前往柏林，然后定居巴黎。1883年她遭到了很大的打击。她获得从

俄罗斯来的关于她丈夫 B. O. 柯瓦列夫斯基自杀的不幸消息。

柯瓦列夫斯卡娅为了料理私事不得已地回到俄罗斯。1883年，她在敖得萨召开的俄罗斯自然科学家和医生第七次代表大会上作报告。报告的题目是：《光在结晶体中的折射问题》。

同年年底，柯瓦列夫斯卡娅收到在斯德哥尔摩大学讲授数学课程的建议，她接受了这个建议。1884 年夏天任命她为这个大学的教授，并在这个大学里一直工作到生命的结束。她无论在大学生中间，也无论在科学工作者中间，用自己出色的讲课争得了很大的名望。柯瓦列夫斯卡娅担任科学院工作的同时，又当了著名的具有巨大科学作用的数学杂志《Acta mathematica》的编辑委员。

柯瓦列夫斯卡娅在斯德哥尔摩的生活时期，1888 年隆重庆祝了她的固体旋转问题的卓越著作的发表，该书赢得了世界声望。正当巴黎科学院宣布评选关于旋转问题的最好的科学研究著作时，这部名为《固体绕定点旋转问题》的著作，刚由柯瓦列夫斯卡娅写成。呈报评选著作的作者们，按照评选的条件，为了使评选委员会公正地判断，把自己的姓名隐藏在一个信封里，信封上写着自己选择的一条格言。获奖著作的作者，所写的格言是“讲你所知道的事，做你该做的事，该是什么就是什么。”评选委员会的成员了解了这部著作后就作出结论说，书的作者作出了比评比条件所要求的还要多得多的贡献，所以决定给作者增加书的奖金，从预先规定的 3,000 法郎增至 5,000 法郎。这项决议通过后，人们才知道，写着这条格言的信封里所藏的名字，原来是俄罗斯女数学家C. B. 柯瓦列夫斯卡娅。此事使评选委员会大为震惊。

随后，柯瓦列夫斯卡娅研究了评选著作所提到的问题，她又得出了这部著作的一些补充结论，为此又获得了瑞典科学院的奖金。

柯瓦列夫斯卡娅很有价值的研究涉及到力学和微分方程方面的许多有意义的问题，这对俄罗斯和法国学者大量深入的研究是一个推动力。

柯瓦列夫斯卡娅卓越的科学著作将她的名字与十九世纪最大数学家的名字并列在一起。这种情况使熟悉她的俄罗斯学者，能够提出关于推荐柯瓦列夫斯卡娅副博士为彼得堡科学院通讯院士的建议。必须指出，早在柯瓦列夫斯卡娅在瑞典的时候，就曾准备推选她为瑞士科学院的院士，但是她放弃了这项荣誉，她认为这可能会引起瑞士的另外一些学者的不满。推荐为彼得堡的通讯院士一事进行得很成功，因为这项推荐已经按照科学院委员的大科学家 П. Л. 切比雪夫、В. Г. 伊姆舍涅兹基（1832～1892）和 В. Я. 布聂雅柯夫斯基的倡议，并有另外一些杰出科学家的支持而预先通过了。因此，推选第一名俄罗斯妇女进入科学院在 1889 年实现了。可是，在这种荣誉的推荐以后，柯瓦列夫斯卡娅未能在俄罗斯找到适合她科学知识水平的工作，所以她仍被迫留在斯德哥尔摩，并于 1891 年初由于肺炎在那里与世长辞了。

柯瓦列夫斯卡娅的科学工作是极有成效的，直到现在，当研究数学问题和与固体有关的问题时，这些成果仍然起着很大的作用。

柯瓦列夫斯卡娅对于发展俄罗斯的数学和科学有很大的作用，一般来说，她以自己作榜样为妇女开创了走向科学的道路，经常直接帮助许多竭力追求知识的俄罗斯妇女，使献身于科学研究的妇女日益增多。

但是，在发展俄罗斯社会中，柯瓦列夫斯卡娅的作用并不仅仅在于数学方面。纪念柯瓦列夫斯卡娅对我们来说是很可贵的，犹如纪念一位促进发展俄罗斯知识分子合乎公共利益自觉心的人物一样。这一点在她留给我们的文学遗产中有所反映。她的主要文学作品之一是小说《女虚无主义者》。在这本书中她真实地介绍了那时俄罗斯的革命运动。这部中篇小说是描述这个主题中的最好的小说之一，但是该书被沙皇政府查禁，直到 1928 年才能出版。除了这本小说以外，出于她的手笔的还有剧本《为幸福而斗争》，这是

她与瑞典女作家安娜·沙尔洛塔·列弗勒合作写成的；此外还写了很有价值的自传体特写《童年的回忆》，以及许多另外的短篇文学作品和诗作。

1896年，由俄罗斯妇女和另外一些组织征集经费，在柯瓦列夫斯卡娅的坟墓上塑造了她的纪念像，像的台座是用巨大的花岗岩做成的。

在结束十九世纪一些俄罗斯科学家活动的概述时，我们不由自主地得出这样的思想：在他们这些代表中，我们有着在世界数学界具有如此伟大思想的有才干和独创性的思想家，由于他们，俄罗斯的数学才能够不仅提高到与国外的同一个水平上，而且在某些问题中，甚至超过了国外。

结 束 语

略论现代数学①

现阶段开始，数学发展的特征是，在它的整个主要分支：几何学、代数和分析中，发生了深刻的变化。

还在十九世纪上半叶，H. И. 罗巴切夫斯基和 J. 鲍耶就已经建立了新的非欧几何学。它的思想是别开生面的和出乎意外的。从这个时期开始，几何学基本上开始了新的发展，改变了"什么叫做几何学"的概念。它的对象和使用范围开始迅速扩大。在十九世纪中期，德国数学家黎曼提出了几何学家能够研究的"空间"的种类有无限多的一般思想，并指出它们可能的真实涵义。如果说，以前几何学只研究物质世界的空间形式，因为它们在欧几里得几何学的框架中找到了反映，那么现在，现实世界的某些其它形式也成了几何学的另外的研究对象，因为它们与空间形式相类似，并且能在几何材料中进行研究。欧几里得几何学本身也发生了很大的变化：在他的几何学里，能够研究比任意点集更加复杂的图形的性质。同样也出现了研究图形性质本身的崭新的方法。分离出一批独立的性质，它们是经过研究从另外的性质中抽象出来的，并且这种抽象作用，这个抽象化已经在几何学的内部产生出它的、实质上成为新的几何学的独特分支。新而又新的空间和空间的几何学：罗巴切夫斯基空间、射影空间、高维欧几里得空间、黎曼空间、拓扑空间

---

① 在这篇现代数学发展的简短概述中，作者采用了《数学——它的内容、方法和意义》一书中 A. Д. 亚历山大罗夫教授《数学概观》文章中的资料。（见中译本，科学普及出版社1958年版，第一卷第一章。——译者注）

等等，都是几何学的研究对象。所有这些新的概念都找到了自己的应用。

在十九世纪同样也出现过代数中的根本变化。如果以往的代数，在发展符号的特征时运用了主要的对象——数，那么现代的代数扩大自己的范围大大超过一般性质的量，在形式上保持着象以前仅用数那样进行运算。现代的代数以向量及其不同种类的移动等等进行运算(根据它们通常的运算特征我们已经可以说：加法、乘法，等等)。因此代数的范围有很大的扩充，它的运算对象常常不是数，甚至也不是量。

代数范畴的这种概括和扩充，还是从伽罗瓦时代开始的。现在发展起来的方法被用在各种不同的科学中，如几何学、分析、物理、结晶学，等。群论和线性代数是现代代数的内容丰富的分支。群论是从最简单的对称学说中产生出来的，它在自己的发展中得到很大的实际运用，特别是运用于代数方程和微分方程的理论。挪威数学家索福斯·李(1842～1899)把群的理论推广到微分方程的积分问题中。

线性代数的整个理论依赖于形如 $\Phi(x)=ax+b$ 的函数概念。从这个概念出发作出整个运算系统，并在科学和技术中奠定了形成实际应用的基础。

在上面的概述中，我们已经不得不谈论科学家和哲学家建立和确定数学分析基本概念所作的大量工作。我们还要提到德国数学家莫里兹·康托尔(1845～1919)的著作，尤其是他创立的集合论著作。这部著作促进了数学的其他许多新分支的发展。集合论对数学发展的一般进程产生了深刻的影响，成为实变函数论、代数拓扑、群论、泛函分析等理论的基础。特别是集合论对数学分析具有很大意义。在分析里发展出新的分支(例如，实变函数论)。这些新分支一般统称为**现代分析**，而以前分析方面的成果则保留古典分析的名称。特别是现代分析应归功于法国数学家埃米尔·波

莱尔(1871～1956)、安里·勒贝格(1877～1941)和使实变函数论思想广泛发展的苏联数学家 H. H. 鲁金(1883～1952)所作的特有的发展。

我们从上面的概述中研究了 П. Л. 切比雪夫关于偏离零最小的函数理论问题的著作，苏联数学家 C. H. 别恩斯坦(1880～1968)的著作进一步发展了函数构造论。

集合论的论据导致建立数学领域的又一个分支，近期它有很大的发展，是现代数学重要的组成部分。这个数学分支是以哲学历史和逻辑原理为基础的，是以科学上的名称数理逻辑进入科学的，它在科学和技术中得到很大的实际应用。

*　　　*　　　*

作者没有包罗数学发展中一切新领域作为自己的目的，也没有力求仔细地阐明现代数学发展的详细内容，因为这就需要作很大的补充研究和编写单独的书，所以仅限于简要地概述现代数学发展的某些道路来结束自己的著作。

人名译名对照表

Abel, Niels Henrik	阿贝尔
Abû'l-Wafâ	阿布尔-威发
Ahmes	阿默士
Al-Battânî	阿尔-巴坦尼
Al-bêrûnî	阿尔-比鲁尼
Alcuin, Albinus	阿尔昆
Al-Fazārī	阿尔-法拉比
Al-Karchî	阿尔-卡拉吉
Al-Kâshî, Jemshîd	阿尔-卡西
Al-Khowârizmî, Mohammed ibn Mûsâ	阿尔-花喇子模
Al-Mámûm	阿尔-马门
Alexander the Great	亚历山大·马其顿王
Alexander I	亚历山大一世
Ampère, André Marie	安培
Anáxagoras	安那克萨哥拉
Anaximander	安那西曼德
Anaximenes	安那西米尼
Antiphon	安提丰
Apollonius	阿波罗尼斯
Arago, Dominique	阿拉哥
Archimedes	阿基米德
Argand, Jean Robert	阿工
Aristotle	亚里士多德
Āryabhata	阿利耶毗陀
Barrow, Isaac	巴鲁

Beda, Venerabilis	僖达
Berkeley, George	贝克莱
Bernoulli, Daniel	伯努利,丹尼尔
Bernoulli, Jacob	伯努利,雅各
Bernoulli, Johann	伯努利,约翰
Bertrand, L.	别尔特朗
Bhâskara	婆什迦罗
Blume	勃鲁姆
Boëthius	波阿齐
Bolyai, Farkas	F. 鲍耶
Bolyai, Janos	J. 鲍耶
Bombelli, Ratael	邦别利
Borel, Emile	波莱尔
Bradwardine, Thomas	布拉瓦丁
Brahmagupta	婆罗摩及多
Briggs, Henry	布里格斯
Bürgi, Jobst	彪奇
Caesar, J.	恺撒,朱里
Cantor, Moritz Benedict	康托尔
Cardano, Girolamo	卡当
Carnot, Lazare Nicolas Marguerite	卡诺
Cauchy, Augustin-Louis	柯西
Cavalieri, Bonaventura	卡瓦列利
Chevalier, Auguste	舍瓦利叶
Christopher, Columbus	哥伦布
Chuquet, Nicolas	舒开
Copernicus, Nicholas	哥白尼
Crelle, August Leopold	克列尔

D'Alembert, Jean le Rond	达朗贝尔
Democritus	德谟克利特
Desargues, Gérard	笛沙格
Descartes, René	笛卡儿
Diophantus	丢番图
Dirichlet, Lejeune- Peter Gustav	狄利克雷
Engels, Friedrich	恩格斯
Eratosthenes	厄拉托塞
Euclid	欧几里得
Eudemus	欧德莫
Eudoxus	攸多克萨斯
Euler, Léonard	欧拉
Fermat, Pierre de	费尔马
Ferrari, Ludovico	斐拉里
Ferro, Scipione del	费罗
Fibonacci, Leonardo	斐波那契
Fourier, Joseph	傅里叶
Friedrich	腓特烈
Galilei, Galileo	伽利略
Galois, Évariste	伽罗瓦
Gauss, Carl Friedrich	高斯
Gerbert	赫伯特
Girard, Albert	基拉德
Goldbach, Christian	哥德巴赫
Grassmann, Hermann Günther	格拉斯曼
Green, George	格林
Gudermann	古德曼
Guldin, Paul	古尔丁

Hamilton, William Rowan	哈密顿
Hegel, G. W. F.	黑格尔
Hermite	埃尔米特
Heron	海伦
Hieron	亥厄洛
Hippocrates	希波克拉提斯
Hûlâgû	旭烈兀
Huygens, Christiaan	惠更斯
Hypatia, Alexander	海帕西娅，亚历山大
Jacobi, Carl Gustav Jacob	雅可比
Justinianus	查士丁尼
Kant, Immanuel	康德
Kepler, Johannes	开普勒
Lagrange, Joseph Louis	拉格朗日
Landau, Edmund	兰道
Laplace, Pierre-Simon	拉普拉斯
Lebesgue, Henry	勒贝格
Legendre, Adrien-Marie	勒让德
Leibniz, Gottfried Wilhelm	莱布尼兹
l'Hospital, Guillaume Francois Antoine de	洛彼塔
Leonardo da Vinci	列奥纳多·达·芬奇
Lie, Sophus	李
Lindemann, Ferdinand	林德曼
Liouville, Joseph	刘维尔
Maggini, G.	马吉尼
Marx, Karl	马克思
Menaechmus	门内马斯

Menelaus 梅内劳斯
Meziriac, Bachet de 麦齐里阿克
Mittag-Leffler, Gösta 米塔·列夫勒
Monge, Gaspard 蒙日
Müller, Johnn 缪勒,约翰
Napier, John 纳皮尔
Nasîr Eddîn 纳速拉丁
Newton, Isaac 牛顿
Nicomachus 尼可马赫
Omar Khayyam 奥玛尔·海雅姆
Oresme, Nicole 奥力森
Pappus 巴普士
Pascal, Blaise 帕斯卡
Pascal, Étienne 帕斯卡
Philippe Auguste Ⅱ 菲力浦二世
Plato 柏拉图
Plutarch 普鲁塔克
Poisson, Siméon-Denis Baron 泊松
Pollio, Marcus Vitruvius 波利俄
Ptolemaeus 托勒玫
Ptolemaeus I 托勒玫一世
Ptolemaeus IV 托勒玫四世
Purbach, Peuerbach 普尔巴赫
Pyrrhos 皮洛士
Pythagoras 毕达哥拉斯
Recorde, R. 列科尔德
Regiomontanus, Johannes 里基奥蒙田纳斯
Rhind, Henry 莱因特

Riemann, Georg Friedrich Bernhard 黎曼
Roberval, Gilles Persone de 罗伯瓦
Rolle, Michel 罗尔
Saint Vincent, Grégoire de 圣-维采特
Socrates 苏格拉底
Speidel, J. 斯佩杰尔
Stevin, Simon 斯提文
Stokes 斯托克斯
Stifel, Michael 史提非
Struve, W. W. 斯特卢威
Tartaglia, Nicolo 塔塔利亚
Taylor, Brook 泰勒
Thales 泰勒斯
Theon 西翁
Torricelli, Evangelista 托里拆利
Tycho Brahe 第谷
Ulugh Beg 兀鲁伯
Viète, Francois(或 Vieta, Francis) 韦达
Vitruvius 维脱鲁维
Vlacq, Adrian 佛拉哥
Wallis, John 瓦里士
Wantzel, Pierre Laurent 万采尔
Waring, Edward 华林
Wasco da Gama 瓦斯哥·达·伽马
Weierstrass, Karl 维尔斯特拉斯
Wessel, Caspar 未塞尔
Widman, Johann 韦得曼

Wolfskehl, F. Paul 佛尔夫斯克尔
Zeno 芝诺

Александров, П. С. 亚历山大罗夫
Аль-Амули 阿尔-阿穆利
Аль-Уклидиси 阿尔-乌克利季西
Амазис 阿玛齐斯
Аппий клавдий 阿毕·克拉弗基
Асархаддон 阿萨尔哈顿
Бартельс 巴尔捷里斯
Башмакова, И. Г. 巴什马科娃
Белинсий, В. Г. 别林斯基
Бермант, А. Ф. 别尔曼特
Бернштейн, С. Н. 别尔恩斯坦
Бирон 比伦
Бобынин, В. В. 巴贝宁
Бороздкин 鲍罗兹德金
Бризон 勃利颂
Броннер 勃罗涅尔
Брюс, Я. В. 勃柳斯
Бубнов, Н. М. 布勃诺夫
Буняковский, В. Я. 布尼雅可夫斯基
Бюе, А. 婆叶
Вагнер, У. 瓦格涅尔
Василий Ⅲ 瓦西里三世
Ващенко-Захарченко, М. Е. 瓦申卡-扎哈尔琴科
Верроккьо, А. 维罗克奥

Владимир святославич 弗拉基米尔·斯维雅托斯拉维奇

Гвин 格费

Герцен, А. И. 赫尔岑

Гиероним 盖洛宁

Голицын, А. Н. 戈利津

Горнер 戈尔涅

Граве, Д. А. 格拉维

Греффе, К. 格列费

Гурьев, С. Е. 古尔叶夫

Гутенберг, И. 古腾堡

Данделен, Ж. 达杰莱

Дудрович 杜特洛维奇

Егоров, Д. Ф. 叶果罗夫

Екатерина II 叶卡琳娜二世

Жаклар, А. 扎克朗

Жаклар, В. 扎克朗

Золотарев, Е. 左洛塔廖夫

Иван Грозный 伊凡雷帝

Иван III 伊凡三世

Имшенецкий, В. Г. 依姆舍涅兹基

Карнеев, З. Я. 卡内叶夫

Карташевский, Г. И. 卡尔塔舍夫斯基

Кильдюшевский, Н. П. 基尔久舍夫斯基

Кирик 基利克

Кирилл 基利尔

Ковалевская, С. В. 柯瓦列夫斯卡娅

Ковалевский, В. О. 柯瓦列夫斯基

Корвин-Круковской, В. В.	柯尔文·克鲁柯夫斯科伊
Корвин-Круковской, П. В.	柯尔文·克鲁柯夫斯科伊
Корра	科拉
Кулибин, И. П.	库利宾
Курганов, Н. Г.	库尔加诺夫
Лаврентьев, М. А.	拉夫伦捷夫
Леффлер, А.	列弗勒
Литтров, И. И.	利特罗夫
Лобачевский, Н. И.	罗巴切夫斯基
Ломоносов, М. В.	罗蒙诺索夫
Лузин, Н. Н.	鲁金
Люстерник, Л. А.	柳斯杰尔尼克
Лютер, М.	路德
Ляпунов, А. М.	李雅普诺夫
Магеллан, Ф.	麦哲伦
Магницкий, Л. Ф.	马格尼兹基
Магницкий, М. Л.	马格尼兹基
Малевич, И. И.	玛列维奇
Марков, А. А.	马尔科夫
Меркатор, Н.	麦卡托
Метродор	麦特罗多尔
Мефодий	麦福基
Мусхелишвили, Н. И.	穆斯海里什维利
Навуходоносор II	布尼甲尼撒二世
Наполеон Бонапарт	拿破仑·波拿巴
Осиповский, Т. Ф.	奥西波夫斯基
Остроградский, М. В.	奥斯特罗格拉德斯基
Пётр I	彼得一世

Поликрат	波里克拉德
Попов, А. Ф.	波波夫
Пюркенштейн	皮尤克什捷恩
Радищев, А. Н.	拉季谢夫
Реле, Ф.	列勒
Селевк	谢列夫克
Сен-Венсан, Г.	圣-维沙
Симонов, И. М.	西蒙诺夫
Синахериб	西那赫里勃
Сонин, Н. Я.	索宁
Страннолюбский, А. Н.	斯特拉诺柳勃斯基
Теофил	捷奥菲尔
Тураев, Б. А.	屠拉也夫
Тыртов, Н. Н.	蒂尔托夫
Уинсон, В.	乌因斯坦
Урысон, П. С.	乌雷松
Фархварсон, А. Д.	法赫瓦松
Феодосий	狄奥多西
Фидий	菲季
Фиников, С. П.	菲尼可夫
Фиори	菲奥里
Франсе, И.	费朗塞
Фусс, И.	富斯
Хинчин, А. Я.	辛钦
Чебышев, П. Л.	切比雪夫
Ширакачи, А.	席拉卡齐
Янка Всеволодовна	扬卡·符赛伏罗多夫娜
Ярослав Мудрый	雅罗斯拉夫·穆德雷

译 后 记

本书是根据苏联明斯克高等学校出版社出版的《数学简史》1979年修订第二版翻译的。在翻译过程中，我们尽量忠实于原著，但也作了必要的删节（如删除了原书的第六章和附录）和改动，有的还加了脚注予以说明。

对本书述及的人名、地名和书名，我们做了较为仔细的核对工作。人名的译名大部分是根据拉丁文翻译过来的。

扬州师范学院副教授蒋声同志和上海科学技术出版社李万年同志对本书进行了审阅，并提出了宝贵意见。蒋声同志还对书中引述的定理、推论、问题作了验证。我们在此谨向他们表示深切的感谢。

由于我们的水平有限，书中难免有错误和疏漏之处，欢迎广大读者提出宝贵意见。

译　　者

1983年5月